ENSA-Agadir, Fall 2017	BTP et Mec 3	Final Exam
Prof. Hassane Bouzahir	2h	Differential Equations

Exercise [Exercice] 1.

1) Change the following linear differential system into a simpler one by differentiating with respect to t the following change into the given polar coordinates [Changer le système differential suivant en un autre plus simple en dérivant par rapport à t le changement en coordonnées polaires donné]. For [Pour] $\lambda \neq 0$ and [et] $\mu > 0$

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda x(t) + \mu y(t) \\ y'(t) = -\mu x(t) + \lambda y(t) \end{cases}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad et \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

2) By use of the result in 1), describe the trajectories of the above system around the trivial equilibruim [En utilisant le résultat de 1), décrire le comportement des solutions du système autour de l'équilibre trivial].
3) Study the case $\lambda=0$ and $\mu>0$ [Etudier le cas $\lambda=0$ et $\mu>0$].

Exercise [Exercice] 2. Find one of the second order linear differential equations, which are equivalent to the following linear differential system [Trouver une des deux équations différentielles linéaires de second ordre qui sont equivalentes au système differentiel linéaire suivant]

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

with [avec] a, b, c et d are fixed real numbers [des nombres réels fixés].

Exercise [Exercice] 3.

1) Write down the Matlab code that gives the exact solution of the following differential system [Ecrire le code Matlab qui résoud analytiquement le système differentiel suivant]

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) + y(t) \end{cases}$$

2) Give the Matlab code that visualizes 49 numerical solutions of the above differential system whose 49 initial conditions are in the range [-3,3]x[-3,3] [Donner le code Matlab qui trace 49 solutions numériques du système differentiel ci-dessus, pour lesquelles les 49 conditions initiales sont dans le carrée [-3,3]x[-3,3]].

Exercise [Exercice] 4.

Solve the following linear differential equation and study the extension [Résoudre l'équation différentielle linéaire suivante en étudiant aussi le raccordement en zero].

Exercise [Exercice] 5. The differential system used to model the motion of the simple pendulum in the plane may be derived, as in mechanics, using Newton's law of motion [la dynamique du pendule simple dans le plan est modélisée par le système différentiel suivant]

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \dfrac{d\theta}{dt}(t) = w(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \dfrac{dw}{dt}(t) = \dfrac{-g}{l} sin\big(\theta(t)\big) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{w}) \end{cases}$$

where θ is the angular displacement from the vertical, l is the length of the arm of the pendulum, which swings in the plane, and g is the acceleration due to gravity […].

1. Find the rest points [Trouver les points stationnaires].
2. When possible, study the stability of the above obtained critical points [Quand c'est possible, étudier la stabilité des points critiques obtenus ci-dessus].

Exercise [Exercice] 6. Let the following differential system be defined by [Soit le système différentiel defini par]

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ y'(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{cases}$$

with [avec] $\delta, \gamma, \beta > 0$ and [et] $\alpha \neq 0$.

1. Find the equilibrium points [Trouver les points d'équilibre].
2. Find the linearized system for each of the equilibrium points [Donner le système linéarisé pour chacun des points d'équilibre].
3. Study the stability of (0,0) if $\alpha > 0$ [Etudier la stabilité de (0,0) si $\alpha > 0$].
4. Study the stability of all equilibrium points if $\alpha < 0$ [Etudier la stabilité de tous les équilibres si $\alpha < 0$].
5. Solve each of the linear systems obtained in Question # 2 above. [Résoudre chacun des systèmes linéaires obtenus dans en question N. 2].
   Hint # 1: Consider two cases $\alpha > 0$ and $\alpha < 0$ [Indication N. 1: On distingue deux cas $\alpha > 0$ et $\alpha < 0$].
   Hint # 2: For a system with negative discriminant Δ of the characteristic equation: [Indication N. 2: Pour un système avec discriminant de l'équation caractéristique Δ négatif]:

   $\lambda_1 = a + ib \qquad\qquad \lambda_2 = a - ib$

   K_1 is the eigenvector associated to [est le vecteur propre associé à] λ_1.

   $B_1 = \frac{1}{2}(K_1 + \overline{K_1}) \qquad B_2 = \frac{i}{2}(-K_1 + \overline{K_1})$

   $$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1\{B_1 \cos(\mathrm{bt}) - B_2 \sin(\mathrm{bt})\}\, e^{at} + c_2\{B_2 \cos(\mathrm{bt}) + B_1 \sin(\mathrm{bt})\}\, e^{at}$$