Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

1.1 Vocabulaire de la topologie d'un evn

1.1.1 Normes, distance associée

Définition 1.1.1 *Soit E un $\mathbb{K}$ ev, ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle norme sur E, toute application $N\ :\ E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :*
i) $\forall \lambda \in K, \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$, où $|.|$ désigne la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$
ii) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
iii) $\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
$*$ On appelle espace vectoriel normé (en abrégé evn) tout couple (E,N).

Remarque 1.1.1
1) Une norme est toujours positive.
2) La propriété iii), dite inégalité triangulaire, implique l'inégalité (très utile) suivante :

$$N(x-y) \geq |N(x) - N(y)|.$$

3) L'application N est souvent notée $\|.\|_E$. On lit, $\|x\|_E$ norme de x pour $x \in E$.

Exemples :
1) Les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n,\ n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on a,

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}; \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

2) Soit X un ensemble non vide, l'ensemble $B(X,\mathbb{K})$ des applications bornées de X dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}-$ev. L'application

$$\begin{array}{rcl} \|.\|_\infty\ :\ B(X,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longrightarrow & \sup_{x \in X} |f(x)| \end{array}$$

définie une norme, appelée norme de la convergence uniforme sur $B(X,\mathbb{K})$.

1.1.2 Distance associée à une norme

Définition 1.1.2 *: Soit $(E, \|.\|)$ un evn; on appelle distance associée à $\|.\|$ l'application*
$d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = \|x - y\|.$$

Proposition 1.1.1 *Soient $(E, \|.\|)$ un evn, d la distance associée à $\|.\|$. On a :*
1) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
2) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation).
3)$\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).
4) $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}\ d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ (positive homogénéité).
5) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (invariance par translation).

Remarque 1.1.2
1) Soit E un ensemble, on appelle distance sur E, toute application $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés 1), 2) et 3) de la proposition précédente.
2) Si $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application vérifiant les propriétés de la proposition, alors il existe une norme $\|.\|$ et une seule sur E telle que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

En effet il suffit de considérer pour $x \in E$ $\|x\| = d(x, 0)$.

1.1.3 Comparaison de normes

Définition 1.1.3 *Soient E un $\mathbb{K}-$ev, Net N' deux normes sur E. On dit que N est équivalente à N', et on note $N \sim N'$, si et seulement si :*

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Proposition 1.1.2 *La relation " est équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.*

Exemples importants :
1) Les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont équivalentes et il est facile de voir qu'on a les comparaisons suivantes : Pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty.$$

La démonstration est facile.
2) Soit $f \in E = C([0, 1], \mathbb{R})$, on définit

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas équivalente sur E, en effet : Il suffit de considérer la suite $f_n \in E$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1-nx) & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On voit bien que $\dfrac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1} = 2n \longrightarrow +\infty$ quand $n \longrightarrow \infty$.

1.2 Boules, Voisinages, Ouverts, Fermés

Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$ evn et d la distance associée.

1.2.1 Boules

Définition 1.2.1 *Soient $a \in E$, $r \in \mathbb{R}_+^*$; on définit les parties suivante de E, appelées respectivement boule ouverte, boule fermée, sphère de centre a et de rayon r :*

$$B(a,r) = \{x \in E, d(x,a) < r\}$$
$$B'(a,r) = \{x \in E, d(x,a) \leq r\}$$
$$S(a,r) = \{x \in E, d(x,a) = r\}$$

Exemples : Si $E = \mathbb{R}^2$, les boules ouvertes pour les trois normes usuelles peuvent être représentées par :

Définition 1.2.2 *Une partie $A \subset E$ est dite bornée si et seulement si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x,y) \in A, \; d(x,y) \leq M.$$

Remarque 1.2.1 *Cette définition est équivalente à dire qu'il existe une constante positive C telle que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leq C$.*

1.2.2 Voisinages

Définition 1.2.3 *Soit $a \in E$, $V \in \mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E) ; on dit que V est un voisinage de a (dans E) si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(a,r) \subset V$. On note $\mathcal{V}_E(a)$ l'ensemble des voisinages de a (dans E).*

Proposition 1.2.1 *Soit $a \in E$.*
i) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a)$, $a \in V$.
ii) $\forall V \in \mathcal{V}_E(a)$, $\forall W \in \mathcal{P}(E)$, $V \subset W \Longrightarrow W \in \mathcal{V}_E(a)$
iii) Une réunion quelconque de voisinage de a est un voisinage de a.
iv) Une intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a.

1.2.3 Ouverts, Fermés

1) Ouverts :

Définition 1.2.4 *Une partie $\Omega \subset E$ est dite ouverte si et seulement si $\forall x \in \Omega, \quad \Omega \in \mathcal{V}_E(x)$.*

Remarque 1.2.2 *Si $\Omega \subset E$ est un ouvert, alors $\forall x \in \Omega$, $\exists r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset \Omega$.*

Exemples :
1) Toute boule ouverte est un ouvert de E, en effet : Pour tout $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in B(a, r)$ on a

$$B(x, r - d(a, x)) \subset B(a, r).$$

2) L'intervalle $]0, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
La proposition suivante découle de la Proposition 1.2.1

Proposition 1.2.2
1) Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.
2) Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

Remarque 1.2.3 *L'intersection d'une famille infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, l'intervalle $]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[;\ n \in \mathbb{N}^*$ est un ouvert et on a*

$$\cap_{n \in \mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$$

et $\{0\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) Fermés :

Définition 1.2.5 *Une patie F de E est dite fermée dans E si et seulement si $C_E(F)$ (le complémentaire de F dans E) est un ouvert.*

En remarquant $(\cup_{i \in I} F_i)^c = \cap_{i \in I} F_i^c$, en déduit de la Proposition 1.2.2 la proposition suivante concernant les fermés.

Proposition 1.2.3
1) Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.
2) Une réunion finie de fermés de E est un fermé de E.

1.2.4 Intérieur, adhérence, frontière

Soient $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$ev, d la distance associée.

Définition 1.2.6 *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.*
1) On appelle intérieur de A, et on note A°, la réunion des parties ouverte de E incluses dans A :

$$A^\circ = \cup_{\Omega \subset A} \Omega, \quad \Omega \text{ ouvert de } E\,.$$

2) On appelle adhérence de A, et on note $\bar{A}$, l'intersection des parties fermées contenant A :

$$\bar{A} = \cap_{F \supset A} \quad F \text{ fermé de E.}$$

3) On appelle frontière de A, et on note $F_r(A)$, la partie de E définie par :

$$F_r(A) = C_{\bar{A}}(A^\circ) = \bar{A} - A^\circ$$

Proposition 1.2.4 *Pour toute partie A de E :*

1. *a)* $C_E(A^\circ) = \overline{C_E}(A)$.
   b) $C_E(\bar{A}) = (C_E(A))^\circ$.
2. *a)* A° *est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) de E inclus dans A.*
   b) $\bar{A}$ *est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) de E contenant A.*

   a) A est un ouvert $\Longleftrightarrow A = A^\circ$.
   b) A est fermé $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$.
   c) $F_r(A)$ *est un fermé de E.*

La proposition suivante donne une caractérisation de l'intérieur et l'adhérence d'une partie A de E.

Proposition 1.2.5 *Soit $x \in E,\ A \in \mathcal{P}(E)$. On a :*

$$\begin{array}{ll} i) & x \in A^\circ \Longleftrightarrow A \in \mathcal{V}_E(x) \\ ii) & x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_E(x),\ V \cap A \neq \emptyset \end{array}$$

1.3 Suite dans un evn

Soient $(E, \|.\|)$ un evn, d la distance associée à la norme $\|.\|$. Une suite dans E est une application de $\mathbb{N}$ dans E, souvent notée $(u(n) = u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.3.1 *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que :*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad (n \geq \mathbb{N} \Longrightarrow d(u_n, l) < \varepsilon)\,.$$

On dit que la suite diverge si et seulement si elle ne converge pas, i.e.

$$\forall\, l \in E;\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad d(u_n, l) > \varepsilon.$$

Remarque et notation : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dans E vers une limite l, on écrira $u_n \longrightarrow_{n\to\infty} l$.
Et on notera souvent $u_n \longrightarrow l$.

Proposition 1.3.1 *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E converge alors sa limite est unique.*

Proposition 1.3.2 *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 1.3.3 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite dans E ; $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{K}$; $l,\ l' \in E$; $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :*

1. $u_n \longrightarrow l \Longrightarrow \|u_n\| \longrightarrow \|l\|$.
2. $u_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|u_n\| \longrightarrow 0$.
3. $u_n \longrightarrow l$ *et* $v_n \longrightarrow l' \Longrightarrow u_n + v_n \longrightarrow l + l'$.
4. $\lambda_n \longrightarrow 0$ *et* (v_n) *bornée* $\Longrightarrow \lambda_n v_n \longrightarrow 0$.
5. $v_n \longrightarrow 0$ *et* (λ_n) *bornée* $\Longrightarrow \lambda_n v_n \longrightarrow 0$.
6. $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ *et* $(v_n) \longrightarrow l' \Longrightarrow \lambda_n v_n \longrightarrow \lambda l'$.

1.3.1 Suite de Cauchy, Espace de Banach

Définition 1.3.2 *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est dite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2 \left(p \geq N\ q \geq N \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq \varepsilon\right).$$

Proposition 1.3.4 *Toute suite convergente dans E est de Cauchy.*

Définition 1.3.3 *Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}-$evn, on dit que E est un* **espace de Banach** *si et seulement si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E.*

Exemples : $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, ou $\mathbb{C}^n$ munit de sa norme usuelle est un espace de Banach.

1.4 Limites, continuité

1.4.1 limite

Soient $(E, \|\|)$; $(F, \|\|)$ deux $\mathbb{K}$-evn, d_E et (resp. d_F) la distance associée à $\|\|_E$ (resp. $\|\|_F$).

Définition 1.4.1 *Soient $X \in \mathcal{P}(E)$; $a \in \bar{X}$, $f\ :\ X \longrightarrow F$ une application, $l \in F$. On dit que f admet l pour limite en a, et on note $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \ \forall x \in X \left(d_E(x,a) \leq \eta \Longrightarrow d_F(f(x), l) \leq \varepsilon\right),$$

ce qui revient à

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(l)\ \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \quad \forall x \in V \cap X,\ f(x) \in W.$$

Proposition 1.4.1 *Si f admet l et l' pour limites en a, alors $l = l'$.*

Proposition 1.4.2 *Pour que f admet l pour limite en $a \in \bar{X}$ il faut et il suffit que : Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, telle que $u_n \longrightarrow a$ on a $f(u_n) \longrightarrow l$.*

1.4.2 Continuité

Définition 1.4.2 *Soient $X \in \mathcal{P}(E)$; $f : X \longrightarrow F$, $a \in X$. On dit que f est continue en a si et seulement si : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui revient à dire*

$$\forall W \in \mathcal{V}_F(f(a))\ \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \quad \forall x \in V \cap X,\ f(x) \in W.$$

Les deux propositions suivantes découlent directement de la définition.

Proposition 1.4.3 *Si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a.*

Proposition 1.4.4 *Pour que $f : X \longrightarrow F$ soit continue en $a \in X$, il faut et il suffit que : Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_n \longrightarrow a$ on a $f(u_n) \longrightarrow f(a)$.*

Définition 1.4.3 *Soient $X \in \mathcal{P}(E)$; $f : X \longrightarrow F$. On dit que f est continue sur X si et seulement si f est continue en tout point de X.*
On note $C^0(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F.

Théorème 1.4.1 *(Caractérisation de la continuité globale)*
Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \longrightarrow F$. Les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
i) f est continue.
ii) L'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de X.
iii) L'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de X.

Exemple :
L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ car c'est l'image réciproque de l'ouvert $]-\infty, 1[$ par l'application continue $\begin{array}{ll} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto xy. \end{array}$

Remarque : L'image directe d'un ouvert (resp ; fermé) par une application continue n'est pas nécessairement ouvert (resp ; fermé). En effet il suffit de considérer :

1) l'application $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 1. \end{array} \right.$, ici $f(\mathbb{R}) = \{0\}$; $\mathbb{R}$ est un ouvert et $\{0\}$ ne l'est pas.

2) l'application $\left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto \exp x. \end{array} \right.$, ici $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$; $\mathbb{R}$ est unferméet $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert.

1.4.3 Opérations sur les applications continues

Dans cette section on ne fournit pas de preuve des résultats énoncés puisque tout se fait de façon analogue au cas $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Proposition 1.4.5 *Soient E, F, G, trois $\mathbb{K}-$evn, $X \in \mathcal{P}(E)$, $Y \in \mathcal{P}(F)$, $f : X \longrightarrow F$, $g : Y \longrightarrow G$ deux applications telle que $f(X) \subset Y$. On note*

$$\begin{array}{lll} g \circ f & : & X \longrightarrow G \\ & & x \longmapsto g\left(f(x)\right). \end{array}$$

Si pour $a \in X$ f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Proposition 1.4.6 *Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $a \in X$, $f, g : X \longrightarrow F$; $\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K}$. On a :*
1) Si f est continue en a, alors l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|f(x)\| \end{array}$$

est continue en a.
2) Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ est continue en a.
3) Si λ et f sont continues en a, alors λf est continue en a.
4) Si λ est continue en a et si $\lambda(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{\lambda}$ est continue en a.

1.4.4 Continuité uniforme

Définition 1.4.4 *Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \longrightarrow F$, une application. On dit que f est uniformément continue (uc) si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall (x, x') \in E^2 \quad (d_E(x, x') \leq \eta \Longrightarrow d_F(f(x), f(x')) \leq \varepsilon)\,.$$

Proposition 1.4.7 *Si f est uc sur X alors est elle continue sur X.*

Remarque 1.4.1 *La réciproque de la proposition précédente est en général fausse.*

En effet, considérons l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$$

est continue mais pas uc. Car :
Soit $\varepsilon = 1$ et soit $\eta > 0$ quelconque. Si on pose $x = \dfrac{\eta}{2} + \dfrac{1}{\eta}$ et $x' = x + \eta$ on a bien $|x - x'| = \eta$ et

$$|x^2 - x'^2| = |x - x'||x + x'| = \eta(2\eta + \frac{2}{\eta}) \ > 1.$$

D'où f n'est pas uc.

1.4.5 applications lipschitziennes

Définition 1.4.5 *Soient $X \in \mathcal{P}(E)$, $f : X \longrightarrow F$, une application.*
1) Soit $k \in \mathbb{R}_+$; on dit que f $k-$lipschitzienne si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in X^2 \quad d_F(f(x_1), f(x_2)) \leq k \ d_E(x_1, x_2).$$

2) Une application $f : X \longrightarrow X$ est dite contractante si et seulement s'il existe $k \in [0, 1[$ telle que f soit $k-$lipschitzienne.

Exemple : l'application

$$\begin{aligned} f \quad : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

est contractante.

Proposition 1.4.8 *Toute application lipschitzienne est uc.*

Remarques :
Soit $f \quad : \quad I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable sur I. Alors f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée.

1.4.6 Applications linéaires continues

Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ deux $\mathbb{K}-$evn, d_E (resp. d_F) la distance associée à $\|.\|_E$ (resp. $\|.\|_F$).
Une application $f \ : \ E \longrightarrow F$ est dite linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in E, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et on rappelle que $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}-$ev et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ (G étant un $\mathbb{K}-$ev), alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

Théorème 1.4.2 *Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) f est continue sur E.
ii) $\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$

Remarque 1.4.2 *Du théorème précédent en déduit que pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a :*
f est continue en 0 $\Longleftrightarrow$ f est continue sur E $\Longleftrightarrow$ f est lipschitzienne.

Chapitre 2

Séries

2.1 Séries à termes dans un evn

Dans cette section $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}-$ev, $\|.\|$ sa norme.

2.1.1 Définitions

1) Notion de série

Définition 2.1.1 *On appelle série à termes dans E tout couple* $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *formé d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à termes dans E et de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Une série numérique est une série à termes dans $\mathbb{K}$.
L'élément u_n *s'appelle le* $n^{\text{ème}}$ *terme (ou terme général) de la série, et* S_n *s'appelle la* $n^{\text{ème}}$ *somme partielle de la série.*
La série est notée $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Définition 2.1.2
1) On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *est convergente si et seulement si la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des sommes partielles converge dans E, et, dans ce cas, la limite des sommes partielles est appelée somme de la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$*, et elle est notée* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.
2) On dit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *diverge si et seulement si elle ne converge pas.*

2) Condition nécessaire de convergence d'une série

Proposition 2.1.1 *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *converge, alors* $u_n \longrightarrow 0$.

Preuve : Il suffit de voir que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \; u_n = S_n - S_{n-1}$.

Puisque $S_n \longrightarrow S = \sum_{k=0}^{\infty} u_n$, on déduit que $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

Remarque 2.1.1
1) Lorsque le terme général u_n ne converge pas vers 0, on dit que la suite diverge grossièrement.
Par exemple $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$; $\sum_{n\geq 0} \sin n$
2) La réciproque de la proposition précédente est fausse. Exemples :
a) $u_n = \log(n+1) - \log n$, *pour* $n \geq 1$, *on a* $u_n \longrightarrow 0$ *et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \log(n+1) \longrightarrow +\infty$ *donc la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*

b) **la série harmonique :** *La série* $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n}$ *est divergente. En effet,*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m = E\left(\frac{\ln n}{\ln 2}\right)$. *On a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow \infty.$$

Reste d'ordre n d'une série convergente :

Définition 2.1.3 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes dans E convergente. Pour* $n \in \mathbb{N}$ *on appelle le reste d'ordre n de la série, et on note* R_n, *la quantité suivante :*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

Remarque 2.1.2 *Si* R_n *est le reste d'ordre n d'une série convergente alors* $R_n \longrightarrow 0$.

2.1.2 Structure algébrique des séries convergentes

Proposition 2.1.2 *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent, alors, pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ *converge et on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Proposition 2.1.3 *Soient E, F deux $\mathbb{K}-$evn, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ (l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F). Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série qui converge dans E alors $\sum_{n\geq 0} f(u_n)$ converge dans F et :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(u_n) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right).$$

Preuve : Si on note par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et puisque f est linéaire, on a $\sum_{k=0}^{n} f(u_k) = f\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$.
Comme $S_n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et f est continue alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(u_k) = \lim_{n\to\infty} f(S_n) = f\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right).$$

Proposition 2.1.4 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes à termes réels, telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors : $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$, en passant à la limite quand $n \to \infty$ on obtient le résultat.

2.2 Séries à termes dans $\mathbb{R}_+$

Dans cette section les séries considérées sont à termes dans $\mathbb{R}_+$.

Lemme 2.2.1 *$\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$. Pour que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, il faut et il suffit qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.*

Preuve : S_n est une suite à termes positifs et croissante, elle est donc convergente si est seulement si elle est majorée.

2.2.1 Théorèmes de comparaison

Théorème 2.2.1 théorème de majoration
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n,\ \sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes réels. Si* $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge, alors* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *converge.*

Preuve : On a : $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$. D'après le Lemme 2.2.1, il s'en suit que $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge.

Remarque 2.2.1 *1) On peut appliquer le Théorème au cas de séries à termes dans* $\mathbb{R}_-$*, il suffit pour cela de considérer* $\sum_{n\geq 0} -u_n,\ \sum_{n\geq 0} -v_n$.
2) On peut remplacer dans le théorème l'hypothèse $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq v_n$ *par l'hypothèse plus faible :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\quad 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Théorème 2.2.2 *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n,\ \sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes dans* $\mathbb{R}_+$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} u_n =_{n\to\infty} O(v_n) \\ \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge} \end{array} \right.$ *, alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

Preuve :

$$u_n =_{n\to\infty} O(v_n) \iff \exists N \in \mathbb{N},\ C \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \forall n \geq N\ 0 \leq u_n \leq C v_n.$$

Par ailleurs $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge donc $\sum_{n\geq 0} C v_n$ converge et d'après le Théorème 2.2.1 $\sum_{n\geq N} u_n$ converge et par conséquant $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Théorème 2.2.3 Théorème d'équivalence
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n,\ \sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes réels.*

Si $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq v_n \\ u_n \sim_{n\to\infty} v_n \end{array} \right.$ *, alors les deux séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont de même nature.*

Preuve :

$$u_n \sim_{n\to\infty} v_n \iff \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - v_n| \leq v_n.$$

On en déduit alors que

$$\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq 2 v_n.$$

D'autre part
$$u_n \sim_{n\to\infty} v_n \Longleftrightarrow u_n = O(v_n) \text{ et } v_n = O(u_n),$$
le Théorème 2.2.2 permet de conclure :
$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum_{n\geq 0} v_n \text{ converge}$$

2.2.2 Série de Reimann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. On se propose d'étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, appelée série de Reimann.
$*$ Si $\alpha \leq 0$, alors le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers zéro et donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
$*$ Si $\alpha = 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ n'est autre que la série harmonique et par conséquant divergente.
$*$ Si $0 < \alpha < 1$, on a $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$ on en déduit que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
Il nous reste enfin le cas $\alpha > 1$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$. Pour tout $n \geq 2$ on a :
$$\frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right),$$
$$\text{d' où } \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$
D'après le lemme 2.2.1 la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
Résumons dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.4 *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Proposition 2.2.1 *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$. S'il existe $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $n^\alpha u_n \longrightarrow 0$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*

Preuve :
$$n^\alpha u_n \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \exists N \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$
Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge, le Théorème de majoration permet de déduire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exemples : Exemple :
1) La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}$ est convergente puisque $n^2 u_n \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$.

2.2.3 Règle d'Alembert

Théorème 2.2.5 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes réels* > 0. *On suppose que la suite* $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geq 0}$ *admet une limite* l *dans* $\mathbb{R}_+$.
1) Si $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge*
2) Si $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*
3) Si $l = 1$ *on ne peut rien dire sur la convergence de la série.*

Preuve :
1) Soit $\lambda = \frac{1+l}{2}$.

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \longrightarrow l \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \; n \geq n_0 \;\; \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda.$$

On déduit donc $\quad u_n \leq \lambda^n \left(\frac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\right) \;\; \forall n > n_0$. d'où

$$\sum_{n\geq n_0+1} u_n \leq \left(\frac{u_{n_0}}{\lambda^{n_0}}\right) \sum_{n\geq n_0+1} \lambda^n.$$

D'autre part $\lambda < 1$ on peut alors montrer facilement que la série géometrique $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ est convergente et que sa somme est $\dfrac{1}{1-\lambda}$.
D'après le théorème de comparaison en déduit que $\sum_{n\geq n_0+1} u_n$ converge et par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge aussi.
2) Supposons $l > 1$,

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \longrightarrow l \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \; n \geq N \;\; \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$$

Ainsi la suite u_n est croissante à partir du rang N et comme $u_N > 0$ le terme général u_n ne converge pas vers zéro quand $n \to \infty$ et donc la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.

3) On donne ici deux exemples :
a) $u_n = \dfrac{1}{n}$. Ici $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \longrightarrow 1$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.

b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$. Ici $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \longrightarrow 1$ et $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exemple : Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 0$
$\bullet \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) \longrightarrow_{n\to\infty} e^{-1} < 1.$
On conclut d'après la règle d'Alembert que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Remarque 2.2.2 *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite, il se peut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ou diverge. On pourra regarder les deux exemples suivants :*

$$u_n = (2+(-1)^n)\,2^{-n} \quad \text{et} \quad u_n = 2+(-1)^n.$$

Théorème 2.2.6 *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels > 0 telle que $(u_n)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow_{n\to\infty} l$.*
1) Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge
2) Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.
3) Si $l = 1$ on ne peut rien dire sur la convergence de la série.

Preuve :
1)) supposons $l < 1$ et soit $\lambda = \frac{1+l}{2} < 1$.

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow_{n\to\infty} l \Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \; n \geq n_0 \quad (u_n)^{\frac{1}{n}} \leq \lambda.$$

On déduit que $0 \leq u_n \leq \lambda^n$ pour $n \geq n_0$. On conclut que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge puisque la série géometrique $\sum_{n\geq 0} \lambda^n$ converge ($\lambda < 1$).
2) Si $l > 1$ alors $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N, \quad (u_n)^{\frac{1}{n}} \geq \dfrac{1+l}{2}$ par conséquant :

$$u_n \geq \beta^n \quad \text{où } \beta = \frac{1+l}{2} > 1$$

donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge puisque la série géometrique $\sum_{n\geq 0} \beta^n$ diverge ($\beta > 1$). 3) Il suffit de considérer les séries de termes générals respectivement $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ respec. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ la première diverge et la deuxième converge et dans les deux cas $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1.
Exemple : La série de terme général $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$ est convergente, car :

$$u_n^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{2n+5} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

2.3 Séries à termes dans un evn

Dans cette section les séries envisagées sont à termes dans un $\mathbb{K}-$evn complet (espace de Banach).

2.3.1 CNS de Cauchy

Théorème 2.3.1 *Une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *à termes dans un espace de Banach est convergente si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(N \leq p < q \Longrightarrow \| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \| \leq \varepsilon \right).$$

Preuve : Si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on voit alors que

$$S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} u_k.$$

Pour conclure le théorème il suffit alors d'appliquer la CNS de cauchy concernant les suites à valeurs dans un evn.

Remarque 2.3.1 *S'il existe deux suites* $(\alpha_n)_{n\geq 0},\ (\beta_n)_{n\geq 0}$ *à termes dans* $\mathbb{N}$, *telles que :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \leq \beta_n \\ \alpha_n \longrightarrow \infty \\ \beta_n \longrightarrow \infty \\ \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} u_k \not\longrightarrow 0 \end{cases}$$ *, alors la série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *diverge.*

Application : *Étudions la série de terme général* $u_n = \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *notons* $\alpha_n = E\left(\exp(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)\right) + 1,\ \beta_n = E\left(\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)\right)$.
On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\sin(\ln k)}{k} \geq \sum_{k=\alpha_n}^{\beta_n} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{k} &\geq \frac{\beta_n - \alpha_n + 1}{\beta_n \sqrt{2}} \\ &\geq \frac{\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi) - 1 - \exp(\frac{\pi}{4} + 2n\pi)}{\sqrt{2}\exp(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi)} \longrightarrow \frac{\exp(\frac{\pi}{2}) - 1}{\sqrt{2}\exp(\frac{\pi}{2})} \neq 0 \end{aligned}$$

2.3.2 Convergence absolue

Définition 2.3.1 *On dit qu'une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *à termes dans un* $\mathbb{K}-$*evn* E *est absolument convergente si et seulement si* $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ *converge.*

Théorème 2.3.2 *Soient E un espace de Banach et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et $\|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$.*

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. D'après la CNS de Cauchy

$$\sum_{n\geq 0} \|u_n\| \text{ converge } \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(N \leq p < q \Longrightarrow \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \leq \varepsilon \right).$$

On déduit

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \left(N \leq p < q \Longrightarrow \| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \| \leq \varepsilon \right)$$

et la CNS de Cauchy nous permet de conclure que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \| \sum_{k=0}^{n} u_k \| \leq \sum_{k=0}^{n} \|u_n\|$$

en passant alors à la limite (quand $n \to \infty$) en conclut le théorème.

Proposition 2.3.1 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à termes dans E.*
Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ est absolument convergente et $u_n = O(v_n)_{n\to\infty}$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Preuve : D'après les hypothèses, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \geq N,\ \|u_n\| \leq A\|v_n\|.$$

Puisque $\sum_{n\geq 0} \|v_n\|$ converge, le théorème de majoration des séries positives nous permet de conclure que $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge aussi.

Exemple : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n\sqrt{n} + \sin n}{n^2}$ est absolument convergente puisque

$$\frac{(-1)^n\sqrt{n} + \sin n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ est convergente (série de Reimann).

2.3.3 Séries alternées à termes réels

Dans ce paragraphe les séries envisagées sont à termes réels.

Définition 2.3.2 *On dit qu'une série* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *à termes réels est alternée si est seulement si :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n| \quad ou \quad u_n = -(-1)^n |u_n|.$$

Théorème 2.3.3 *(***Théorème spécial à certaines séries alternées : TSCSA** *)*
Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes réels, tel que :* $\begin{cases} \sum_{n\geq 0} u_n \ \ \text{est alternée} \\ u_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \\ (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \ \ \text{est décroissante} \end{cases}$ *, alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*

Preuve : Supposons, par exemple : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n |u_n|$. Considérons la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on va montrer que $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En effet :

- $S_{2p+2} - S_{2p} = -|u_{2p+1}| + |u_{2p+2}| \leq 0$
- $S_{2p+3} - S_{2p+1} = |u_{2p+2}| - |u_{2p+3}| \geq 0$
- $S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \longrightarrow_{p\to\infty} 0.$

Il en résulte que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, c'est à dire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exemple : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha},\ \alpha \in]0,1]$ est convergente.

Proposition 2.3.2 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série vérifiant les conditions du Théorème 2.3.3, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq |u_{n+1}| \quad \text{où } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \ \ \text{est le reste d'ordre } n.$$

Preuve : La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ relève du TSCSA, et on a vu dans le preuve du Théorème 2.3.3 que les suites $(S_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et admettent pour limite $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. On déduit alors que : $\forall n \in \mathbb{N} \ \ |S_n - S| \leq |S_{n+1} - S_n|$ ce qui nous permet de conclure que :

$$|R_n| = |S_n - S| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_{n+1}|.$$

2.3.4 Comparaison d'une série à une integrale

Théorème 2.3.4 *Soient* $n_0 \in \mathbb{N}$; $f \ : \ [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une application continue par morceaux, décroissante.*
La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ *converge si et seulement si l'application f est intégrable sur* $[n_0, +\infty[$, *et on a*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Preuve :
1) Supposons que f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$, et soient $n > n_0$; $k \geq n_0$. Pour tout $x \in [k, k+1]$ on a :

$$f(k+1) \leq \int_{k}^{k+1} f(x)\, dx \leq f(k).$$

En sommant sur k on obtient

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \tag{2.1}$$

de cette dernière inégalité et de la positivité de f en déduit

$$\sum_{k=n_0}^{n} f(k+1) \leq \int_{n_0}^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Le lemme de maroration des séries à termes positives permet de conclure que $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge.
De plus, pour $n, j \in \mathbb{N}$; $n_0 \leq n \leq j$, l'inégalité (2.1) reste valable et on a :

$$\sum_{k=n}^{j} f(k+1) \leq \int_{n}^{j+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n}^{j} f(k)$$

en faisant tendre $j \to \infty$, puisque toute les quantités sont convergentes, on a

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

2) Réciproquement : Supposons que $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge. D'après (2.1) on a :

$$\int_{n_0}^{n+1} f(x)\, dx \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) < \infty$$

en faisant tendre $n \to \infty$ on déduit que f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E désigne un $\mathbb{K}-$evn de dimension finie, dont la norme est notée $\|.\|$.

3.1 Suites d'applications

3.1.1 Convergence simple et uniforme

X désigne un ensemble non vide.

Définition 3.1.1 *Soit $(f_n : X \longrightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. Soit $f \in E^X$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X) si et seulement si, pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ dans E. On dit que f est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
On peut noter $f_n \longrightarrow^{CS}_{n\to\infty} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f (sur X).

Exemple : La suite $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers 0 sur $]0, 1[$.

Définition 3.1.2 *Soit $(f_n : X \longrightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. Soit $f \in E^X$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X) si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \left(n > N \Longrightarrow \sup_{x\in X} \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon\right).$$

On peut noter $f_n \longrightarrow^{CU}_{n\to\infty} f$ pour exprimer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f (sur X).

Exemple : La suite $f_n(x) = \sin^n x$ converge uniformément vers 0 sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Remarque 3.1.1 *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.*

Théorème 3.1.1 *Soit $(f_n : X \longrightarrow E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications. Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (sur X), il faut et il suffit que :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall(p, q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in X, (p > N,\ q > N \Longrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon).$$

Preuve :
1) Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (sur X) vers une application $f \in E^X$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n > N,\ \forall x \in X\ \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p > n,\ q > N$; on a

$$\forall x \in X\ \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2) Réciproquement, supposons la condition de Cauchy vérifiée. Soit $x \in X$ fixé, d'après l'hypothèse la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E et comme E est de dimension finie, donc complet, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers un élément noté $f(x)$.
Montrons maintenant que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

$$\text{Soit } \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in X, (p > N,\ q > N \Longrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon)\,.$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > N$; on a

$$\forall x \in X,\ \forall q \in \mathbb{N}\,(q > N \Longrightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon)$$

en passant à la limite quand q tend vers l'infini :

$$\forall x \in X,\ \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

3.1.2 Convergence uniforme et continuité

Dans ce paragraphe X désigne une partie d'un $\mathbb{K}-$evn de dimension finie F.

Théorème 3.1.2 *Soient $a \in X$, $(f_n\ :\ X \longrightarrow E)_n$ une suite d'applications.*
Si $\begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue en } a \\ \bullet\ (f_n)_n \text{ converge uniformément sur } X \text{ vers une application } f \end{cases}$
alors f est continue en a.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall x \in X,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \left(n > N \Longrightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Soit $N' = N + 1$, puisque $f_{N'}$ est continue en a, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(a)$ dans F tel que :

$$\forall x \in X \cap V,\quad \|f_{N'}(x) - f_{N'}(a)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc : $\forall x \in X \cap V$

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_{N'}(x)\| + \|f_{N'}(x) - f_{N'}(a)\| + \|f_{N'}(a) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que f est continue en a.

Remarque 3.1.2 *Par contraposition le théorème précédent permet de montrer, dans certains exemples, la non convergence uniforme*
Exemple : *Soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$, mais la convergence n'est pas uniforme puisque f n'est pas continue en 1 alors que chaque f_n l'est.*

Théorème 3.1.3 *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leq b$ et $(f_n : [a,b] \longrightarrow E)_n$ une suite d'applications.*

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet\ (f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [a,b] \text{ vers une application } f \end{cases}$$

$$\text{alors} \quad \begin{cases} \bullet\ f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \bullet \text{ la suite } \left(\int_a^b f_n\right) \text{ converge dans } E \\ \bullet \displaystyle\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n\right). \end{cases}$$

Preuve : La continuité de f découle du Théorème 3.1.2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \| \int_a^b f_n(x)\, dx - \int_a^b f(x)\, dx\| &\leq \int_a^b \|f_n(x) - f(x)\|\, dx \\ &\leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, on conclut que : $\displaystyle\int_a^b f_n \longrightarrow_{n\to\infty} \int_a^b f$.

Remarque 3.1.3
1) Il se peut qu'une suite d'applications $(f_n)_n$ converge simplement vers une application f et que la suite $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ ne converge pas vers $\int_a^b f$. En effet il suffit de considérer $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall n \geq 2$

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n n^3 x & si \quad x \in [0, \frac{1}{n}] \\ (-1)^{n+1} n^3 \left(x - \frac{2}{n}\right) & si \quad x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & si \quad x \in [\frac{2}{n}, 1]. \end{cases}$$

2) On ne peut pas, dans le théorème, remplacer $[a,b]$ par un intervalle non fermé borné. En effet, on pourra considérer la suite $(f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{n-x}{n^2} & si \quad x \in [0,n] \\ 0 & si \quad x \in]n, +\infty[\end{cases}$$

On peut montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0, et que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0.

3.1.3 convergence uniforme et dérivation

Théorème 3.1.4 *Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a \leq b$ et $(f_n : [a,b] \longrightarrow E)_n$ une suite d'applications.*

$$Si \begin{cases} \bullet \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,b] \\ \bullet\ (f'_n)_n \text{ converge uniformément sur } [a,b] \text{ vers une application } g \\ \bullet \text{ il existe } x_0 \in [a,b] \text{ tel que } (f_n(x_0))_n \text{ converge dans } E \end{cases}$$

$$alors \begin{cases} \bullet\ (f_n)_n \text{ converge uniformément sur } [a,b] \text{ vers une application } f \\ \bullet\ f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,b] \\ \bullet\ f' = g. \end{cases}$$

Preuve :
1) Montrons d'abord que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$.
Soit $x \in [a,b]$, puisque f_n est de classe C^1 sur $[a,b]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt.$$

En appliquant le Théorème 3.1.3 à la suite $(f'_n)_n$ sur l'intervalle $[x_0, x]$ on a

$$\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt \longrightarrow_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

D'autre part, il existe $l \in E$ tel que $f_n(x_0) \longrightarrow_{n\to\infty} l$.
Donc : $f_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} l + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\, dt$, pour tout $x \in [a,b]$.
On a montré alors que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers :

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt, \quad x \in [a,b].$$

2) Montrons que cette dernière convergence est uniforme. Soit $(x,n) \in [a,b] \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - f(x)\| &= \|f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\, dt - l - \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt\| \\ &\leq \|f_n(x_0) - l\| + \|\int_{x_0}^{x} (f'_n(t) - g(t))\, dt\| \\ &\leq \|f_n(x_0) - l\| + (b-a)\|f'_n - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Comme $\|f_n(x_0) - l\| \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $\|f'_n - g\|_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ et $b-a$ est finie, on déduit que $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, d'où la convergence uniforme.
3) De la définition de f découle que f est de classe C^1 et $f' = g$.

Remarque 3.1.4 *Montrer que la suite* $\left(f_n : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ par } f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'applications de classe C^1, converge uniformément vers une application qui n'est pas de classe C^1.*

3.2 Séries d'applications

Définition 3.2.1 *On appelle série d'application tout couple* $((f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ *formé d'une suite d'application* ($f_n : X \longrightarrow E$)*, où* X *est un ensemble non vide, et de la suite* $(S_n)_n$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

La série d'application est souvent notée $\sum_{n\geq 0} f_n$*. L'ensemble des* $x \in X$ *tels que* $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ *converge dans* E *est appelé domaine de convergence simple.*

Exemple : La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} x^n$ admet comme domaine de convergence simple l'intervalle $]-1, 1[$.

Définition 3.2.2 *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *une série d'application qui converge simplement sur* X*.*

$*$ *On appelle, pour chaque* $n \in \mathbb{N}$*, reste d'ordre* n*, l'application* $R_n : X \longrightarrow E$ *définie par :*

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

$*$ *On appelle somme de la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *l'application, notée* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$*, définie de* X *dans* E *par :* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$

Remarque 3.2.1 *La fonction* $R_n(x)$ *n'existe que si* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement et dans ce cas on a*

$$S_n(x) + R_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Définition 3.2.3 *On dit que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge absolument sur* X*, si et seulement si pour tout* $x \in X$*,* $\sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|$ *converge (dans* $\mathbb{R}$*).*

Remarque 3.2.2 *1) Si* E *est un evn complet alors il est tres facile de voir que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge absolument sur* X *alors elle converge simplement sur* X*.*
En effet il suffit de voir, en notant $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$*, que*

$$m \geq n \in \mathbb{N}, \qquad \|S_m(x) - S_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k(x)\| \longrightarrow 0 \quad \textit{quand } n \textit{ est assez grand}$$

*2)***Exemple :** *la série* $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^2}$ *converge absolument sur* $\mathbb{R}$

Définition 3.2.4 *On dit que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément (CU) sur X, si et seulement si, la suite* $(S_n)_n$ *converge uniformément sur X.*

Exemple : La série de fonctions $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{1+n^2x^2}$ converge uniformément sur $[1,2]$.

Proposition 3.2.1 *La série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge uniformément sur X, si et seulement si :*

$$\begin{cases} \text{la série } \sum_{n\geq 0} f_n \text{ CS sur } X \\ \text{la suite } R_n \text{ des restes CU vers } 0 \text{ sur } X. \end{cases}$$

Preuve :
1) Supposons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X. Alors la suite (S_n) CU et donc CS d'où $\sum_{n\geq 0} f_n$ CS.
Montrons que (R_n) CU vers 0. Notons S la limite uniforme et simple de la suite (S_n), on a :

$$\forall x \in X, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \longrightarrow S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Comme $\forall x \in X;\ R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ on déduit que

$$\|R_n\|_\infty = \sup_{x\in X}\|R_n(x)\| = \sup_{x\in X}\|S(x) - S_n(x)\| \longrightarrow 0.$$

2) Réciproquement, en notant $(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, on sait que $\forall x \in X;\ R_n(x) = S(x) - S_n(x)$. Comme $R_n \longrightarrow 0$ uniformément on déduit que S_n converge uniformément vers S sur X. Donc $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X.

Proposition 3.2.2 *Si* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *CU sur X, alors la suite* $(f_n)_n$ *CU vers 0 sur X.*

Preuve :

$$\begin{aligned} S_n \longrightarrow S \text{ CU} &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \|S_n - S\|_\infty \leq \varepsilon \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \|S_{n+1} - S_n\|_\infty \leq 2\varepsilon \\ &\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geq N \quad \|f_n(x)\|_\infty \leq \varepsilon \\ &\Longrightarrow f_n \longrightarrow 0 \text{ CU} \end{aligned}$$

Théorème 3.2.1 (**CNS de Cauchy**) *Pour que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *CU sur X il faut et il suffit que :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p,q)) \in \mathbb{N}^2,\ \forall x \in X \qquad \left(N < p < q \Longrightarrow \| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \| < \varepsilon \right).$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la CNS de Cauchy à la suite $(S_n)_n$ qui CU sur X et de remarquer que $S_q - S_p = \sum_{k=p+1}^{q} f_k$.

Définition 3.2.5 *On dit que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement (CN) sur X si et seulement s'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Longrightarrow f_n \in B(X,E)) \\ \sum_{n\geq N} \|f_n\|_\infty \quad \text{converge.} \end{cases}$$

Remarque 3.2.3 *Pour que* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *CN, il faut et il suffit qu'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et une suite* $(u_n)_{n\geq N}$ *à termes dans* $\mathbb{R}_+$ *tels que*

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq N} u_n \text{ converge.}$$

Théorème 3.2.2

$$\sum_{n\geq 0} f_n \quad CN \Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n\geq 0} f_n \quad CA & \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n \quad CS \\ \sum_{n\geq 0} f_n \quad CU & \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} f_n \quad CS. \end{cases}$$

Preuve :
1) Supposons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad f_n \text{ est bornée}$$
$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty \text{ converge}$$

ceci avec le fait que $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ nous permet de conclure que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge absolument. Ainsi pour tout $x \in X$, $\sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|$ converge et puisque E est complet on déduit que pour tout $x \in X$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement.

2) Supposons que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement. Comme on vient de voir $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement. D'autre part, si $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$, on a

$$\|R_n(x)\| = \|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \to +\infty$$

d'où $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X. Et on déja vu que la convergence uniforme d'une série de fonctions implique la convergence simple de cette même série. Ce qui termine la preuve du théorème.

3.2.1 Quelques résultats de régularités sur la somme d'une série d'applications

Dans ce paragraphe I désigne un intervalle non réduit à un point. La preuve des resultats énoncés découle des Théorème 3.1.2, Théorème 3.1.3 et Théorème 3.1.4 et elle sera laissée au lecteur.

Théorème 3.2.3 *Soient $a \in I$, $\sum_{n\geq 0} (f_n \; : \; I \longrightarrow E)$ une série d'applications.*

$$Si \begin{cases} - \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \; f_n \text{ est continue en } a \\ - \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est continue en a.

Corollaire 3.2.1 *Soient $a \in I$, $\sum_{n\geq 0} (f_n \; : \; I \longrightarrow E)$ une série d'applications.*

$$Si \begin{cases} - \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \; f_n \text{ est continue sur } I \\ - \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } I \end{cases}$$

alors $\sum_{n\geq 0} f_n$ est continue sur I.

Théorème 3.2.4 *Soient $a, b \in \mathbb{R}^2, a \leq b$ et $\sum_{n\geq 0} (f_n \; : \; [a,b] \longrightarrow E)$ une série d'applications.*

$$Si \begin{cases} - \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \; f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ - \sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur } [a,b] \end{cases}$$

$$\text{alors} \begin{cases} -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } [a,b] \\ -\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\int_a^b f_n(x)\, dx\right) \text{ converge dans } E \\ -\displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx. \end{cases}$$

Théorème 3.2.5 *Soit* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (f_n \;:\; I \longrightarrow E)$ *une série d'applications.*

$$\text{Si} \begin{cases} - \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ -\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge simplement sur } I \\ -\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n' \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \end{cases}$$

$$\text{alors} \begin{cases} -\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \\ -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ -\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'. \end{cases}$$

Corollaire 3.2.2 *Soient* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (f_n \;:\; I \longrightarrow E)$ *une série d'applications,* $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Si} \begin{cases} - \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \\ - \text{ pour tout } i \in \{0,\cdots,k-1\}, \displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ converge simplement sur } I \\ -\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n^k \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \end{cases}$$

$$\text{alors} \begin{cases} - \text{ pour tout } i \in \{0,\cdots,k-1\}, \displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n^{(i)} \text{ converge uniformément sur tout segment de } I \\ -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } I \\ - \text{ pour tout } i \in \{0,\cdots,k\}, \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}. \end{cases}$$

Chapitre 4

Série entière

4.1 Rayon de convergence

4.1.1 Définition d'une série entière :

On appelle série entière toute série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_n \ : : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$ telle qu'il existe une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N};\ \forall z \in \mathbb{C} \quad f_n(z) = a_n z^n.$$

Remarque :
1) On notera souvent $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ pour désigner une série entière.
2) Exemples : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$;
$\sum_{n\geq 2} z^{n^2}$; $\sum_{n\geq 0} \sin n z^n$.

<u>**But**</u> : Le but de ce chapitre est de déterminer, si possible, le domaine de convergence d'une série entière et étudier les propriétés de sa somme S. on répondra aussi à la question suivante : Etant donné une fonction $f(z)$ existe t-il une série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n = f(z)$.

4.1.2 Rayon de convergence :

Proposition : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $(a_n \gamma^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $|z| < \gamma$, on a :

$$a_n z^n = O\left(\left(\frac{|z|}{\gamma}\right)^n\right)$$

et en particulier la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve : Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n \rho^n| \leq M.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$ on a

$$|a_n z^n| = |a_n \rho^n| \frac{|z|^n}{\rho^n} \leq M \frac{|z|^n}{\rho^n}$$

donc $a_n z^n = O\left(\frac{|z|^n}{\rho^n}\right)$ et comme $\frac{|z|}{\rho} < 1$ en déduit que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Théorème définition : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \begin{cases} |z| < R \Longrightarrow \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument }\right) \\ |z| > R \Longrightarrow \left(\left(a_n z^n\right)_n \text{ n'est pas bornée }\right) \end{cases}$$

Cet élément R s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Exemples :
1) la série $\sum_{n\geq 0} z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet,
si $r > 1$ on a $r^n \longrightarrow +\infty$ ainsi $(z^n)_n$ n'est pas bornée.
Si $r < 1$ on a dèja vu que $\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-r}$.
2) la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet,
si $r > 1$ on a $\frac{r^n}{n^2} \longrightarrow +\infty$ ainsi $\left(\frac{r^n}{n^2}\right)_n$ n'est pas bornée.
Si $r \leq 1$ on a $\frac{r^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ et donc la série converge absolument.
Remarquer qu'ici même pour $|z| = 1$ la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n^2}$ converge.

Preuve :
1) Existence de R.
Soit $E = \{\rho \in \mathbb{R}_+ / \left(a_n \rho^n\right)_n \text{ bornée}\}$, il est facile de voir que E est non vide et qu'il est un intervalle de $\mathbb{R}_+$. Soit alors $R = \sup_{\bar{\mathbb{R}}_+} E$.
Considérons $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$; il existe $\rho \in E$ tel que $|z| < \rho < R$. Puisque $(a_n \rho^n)$ est bornée le Lemme d'Abel permet de conclure que $\sum_{n\geq 0} a_n \rho^n$ est absolument convergente.
Si maintenant $z > R$, alors $z \notin E$ ainsi $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
2) Unicité de R.
Supposons qu'il existe R_1, R_2 vérifiant les conditions du Théorème. On peut supposer

par exemple que $R_1 < R_2$.
1^{er}cas : Si $R_2 < +\infty$; posons $\rho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ on alors

$$\begin{cases} \sum_{n\geq 0} a_n\rho^n \quad \text{c.a} \quad (\text{car } \rho < R_2 \\ (a_n\rho^n) \quad \text{n'est pas bornée, puisque } \rho > R_1 \end{cases}$$

d'où la contradiction.
$2^{\text{ème}}$cas : Si $R_2 = +\infty$, on pose $\rho = R_1 + 1$ et on abouti à la même contradiction.

Remarque : Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence, alors l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}/|z| = R\}$ est appelé cercle d'incertitude.

Remarque importante : Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. On a

$$\begin{aligned} R &= \sup\{|z| \ / \ \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge absolument } \} \\ R &= \sup\{|z| \ / \ \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge } \} \\ R &= \sup\{|z| \ / \ (a_n z^n)_n \text{ borné } \} \\ R &= \sup\{|z| \ / \ a_n z^n \longrightarrow 0 \text{ quand } n \to +\infty\} \end{aligned}$$

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z| < R \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ cv abs} \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ cv } \Longrightarrow (a_n z^n) \longrightarrow 0(\text{ quand } n \to +\infty),$$

et si

$$|z| > R \Longrightarrow (a_n z^n) \text{ n'est pas bornée } \Longrightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ ne converge pas.}$$

Exemples :
1) Série géométrique : Soit $a \in \mathbb{C}^*$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a^n z^n$ admet pour rayon $\dfrac{1}{|a|}$.
2) la série $\sum\limits_{n\geq 0} e^{-\sqrt{n}} z^n$ admet pour rayon 1. En effet,

$$\begin{aligned} |z| < 1 &\implies e^{-\sqrt{n}} z^n \longrightarrow 0 \\ |z| > 1 &\implies e^{-\sqrt{n}} z^n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Définition 4.1.1 *Soient* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière, R son rayon de convergence. On appelle somme de la sŕie entière* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ *l'application*

$$S \ : \ \{z \in \mathbb{C}, \ |z| < R\} \longrightarrow \mathbb{C} \textit{ définie par } S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

4.1.3 Comparaison de rayons

Proposition : Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergences respectivement R_a et R_b.
1) Si $\forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$
2) si $a_n = O(b_n)$ pour $n \equiv \infty$ alors $R_a \geq R_b$
3) Si $|a_n| \equiv |b_n|$ pour $n \equiv \infty$ alors $R_a = R_b$.

Preuve : 1) Soit $z \in \mathbb{C};\ |z| < R_b$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$$

en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est a.c. et donc $|z| \leq R_a$.
2) Si $a_n = O(b_n)$ $(n \equiv \infty)$ alors il existe $N \in \mathbb{N},\ M \in \mathbb{R}_+$ tels que $|a_n| \leq |b_n|$. On déduit donc de 1) que $R_b \leq R_a$.
3) Si $|a_n| \equiv |b_n|$ $(n \equiv \infty)$ alors $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$ et 2) nous permet alors de conclure.

Exemples :
1) La série $\sum_{n\geq 0} e^{\sin n} z^n$?, on a

$$e^{-1} \leq e^{\sin n} \leq e$$

comme $\sum_{n\geq 0} e^{-1} z^n$ et $\sum_{n\geq 0} e z^n$ sont de rayons 1, on conclut d'après la propriété 1) de la proposition précèdente que $\sum_{n\geq 0} e^{\sin n} z^n$ a pour rayon 1.
2) La série $\sum_{n\geq 1} \left((1+\frac{1}{n})^n - e \right) z^n$? on a

$$(1+\frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} = e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}.$$

Ainsi

$$\left((1+\frac{1}{n})^n - e \right) \equiv \frac{-e}{2n}$$

on conclut alors que La série $\sum_{n\geq 1} \left((1+\frac{1}{n})^n - e \right) z^n$ a pour rayon 1.

4.1.4 Règle de d'Alembert

Proposition 4.1.1 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière. S'il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\left\{ \forall n \geq N,\ a_n \neq 0;\ \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = l \in \bar{\mathbb{R}}_+ \right\}$ *alors le rayon* R *de* $\sum a_n z^n$ *est :* $R = \frac{1}{l}$ *si* $l \neq 0$ *et* $R = +\infty$ *si* $l = 0$.

Preuve : Facile.

4.2 Opérations sur les séries entières

4.2.1 Définition

Définition 4.2.1 *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *deux séries entières, respectivement de rayon et de somme* R_a, R_b, S_a *et* S_b.

1. *Le produit de la série* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *par le scalaire* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *est la série entière* $\sum_{n\geq 0} \lambda a_n z^n$ *de rayon* $R_{\lambda\, a}$ *et de somme* $S_{\lambda\, a}$.
2. *La somme des deux séries entières* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *est la série entière* $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$ *de rayon* R_{a+b} *et de somme* S_{a+b}.
3. *La série entière produit des deux séries entières* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ *est la série* $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ *où* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *de rayon* R_c *et de somme* S_c.

Proposition 4.2.1 *Avec les notations de la définition précèdente ; on a :*

1. $R_{\lambda\, a} = \lambda R_a$ *et* $S_{\lambda\, a} = \lambda S_a$
2. $\begin{cases} R_{a+b} \geq Min(R_a, R_b),\ \text{et } R_{a+b} = Min(R_a, R_b) \text{ si } R_a \neq R_b \\ \forall z \in \mathbb{C},\ (|z| < Min(R_a, R_b) \Longrightarrow S_{a+b}(z) = S_a(z) + S_b(z)) \end{cases}$
3. $\begin{cases} R_c \geq Min(R_a, R_b) \\ \forall z \in \mathbb{C},\ (|z| < Min(R_a, R_b) \Longrightarrow S_c(z) = S_a(z) S_b(z)) \end{cases}$

Preuve :
1) évident.
2) Soit $|z| < Min(R_a, R_b)$ alors $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ converge absolument. Ainsi la somme des deux séries converge ce qui montre que

$$R_{a+b} \geq Min(R_a, R_b).$$

Si mantenant on suppose que $R_a \neq R_b$; par exemple $R_a < R_b$. On montre facilement que $\forall \rho \in]R_a, R_b[$, $\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)\rho^n$ diverge, ce qui implique que $\rho \geq R_{a+b}$, ainsi
$R_{a+b} \leq R_a$ et finalement $R_{a+b} = Min(R_a, R_b)$.
3) Facile.

Example 4.2.1 *Les séries* $\sum z^n$ *et* $\sum -z^n$ *sont de rayon de convergence 1, mais la série somme a pour rayon de convergence* $+\infty$.

4.2.2 Dérivation

Définition 4.2.2 *On appelle série entière dérivée d'une série entière* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *la série* $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ *ou encore* $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$.

Proposition 4.2.2 *Une série entière a le même rayon que sa série entière dérivée.*

Preuve : Notons R_a le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et R'_a le rayon de convergence de la série dérivée $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.
Remarquons tout d'abord que la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge si et seulement si $\sum_{n\geq 1} n a_n z^n$ converge. Montrons maintenant que $R_a = R'_a$.
1) $|a_n| \leq n|a_n| \Longrightarrow R_a \geq R'_a$.
2) Montrons que $R_a \leq R'_a$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R'_a$. Il existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tel que $|z| < \rho < R_a$. On a :

$$|n a_n z^n| = a_n \rho^n \left(n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \right)$$

avec $a_n \rho^n$ borné et $\left(n \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n \right) \longrightarrow 0$.
Donc $|z| \leq R'_a$; ainsi $R_a \leq R'_a$.

4.3 Convergence

Théorème 4.3.1 *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayon R. La série d'applications* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *converge normalement sur tout partie compacte (fermée bornée) K incluse dans le disque ouvert* $B(0, R)$.

Preuve : Soit $K \subset B(0, R)$ un compacte, il existe $0 \leq R' < R$ tel que $K \subset B(0, R')$. Il vient que

$$\sup_{z\in K} |a_n z^n| \leq |a_n|(R')^n$$

et puisque $\sum_{n\geq 0} a_n (R')^n$ converge en déduit que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur K.

Remarque 4.3.1 *La série* $\sum_{n\geq 0} z^n$ *a pour rayon* $R = 1$*, mais elle ne converge pas normalement sur la* $B(0, 1)$.

4.4 Régularité de la somme d'une série entière

Théorème 4.4.1 *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$*, R son rayon de convergence, S sa somme. L'application S est continue sur le disque ouvert $B(0,R)$.*

Preuve : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z_0| < R$, il existe $r > 0\,;\ |z_0| < r < R$. Comme $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ c.n. sur $\bar{B}(0,r)$ et que chaque application $z \mapsto a_n z^n$ est continue sur $\bar{B}(0,r)$, en déduit S est continue, en particulier en $z_0 \in \bar{B}(0,r)$. Donc S est continue sur $B(0,R)$.

Théorème 4.4.2 *(cas réel) Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$*, R son rayon de convergence, S sa somme. On suppose $R > 0$. L'application S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et on a :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R,R[, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

en particulier $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Preuve : On a déja vu que les séries entières dérivées successives $(\sum_{n\geq 0} a_n x^n,\ \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}, \ldots, \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k}, \ldots$ ont le même rayon de convergence. Elles convergent normalement sur tout compacte $K \subset]-R,R[$. D'après le Théorème de dérivation des séries de fonctions en déduit que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-R,R[$:

$$S^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(k)} = \sum_{n\geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n x^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

Pour $x = 0$ on a $S^{(k)}(0) = k! a_k$.

4.5 Développement en série entière

Dans tout ce paragraphe la variable notée x est réelle.

4.5.1 Définitions et généralités

Définition 4.5.1
1) Soit $V \in \mathcal{V}_\mathbb{R}(0)$ un voisinage dans $\mathbb{R}$ de 0. On dit que f est développable en série entière (centrée) en 0 (en abrégé DSE(0)) si et seulement s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *de rayon R et $U \in \mathcal{V}_\mathbb{R}(0)$ tels que :*

$$\begin{cases} R > 0 \\ \forall x \in V \cap U \cap]-R, R[; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$$

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$. On dit que f est développable en série entière (centrée) en x_0 (en abrégé $DSE(x_0)$) si et seulement s'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon R et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tels que :

$$\begin{cases} R > 0 \\ \forall x \in V \cap U \cap]x_0 - R, x_0 + R[; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \end{cases}$$

Remarque 4.5.1
1) La notion de $DSE(x_0)$ est une propriété local : si f est $DSE(x_0)$ et s'il existe $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x_0)$ tel que f et g coï incident sur W, alors g est $DSE(x_0)$.
2) f est $DSE(x_0)$ si et seulement si la fonction $t \longmapsto f(x_0+t)$ est DSE(0). Nous allons donc nous intéresser principalement à la notion de $DSE(0)$.
3) Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, tout polynome P est $DSE(x_0)$, en effet :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{n=0}^{degP} \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Proposition 4.5.1 *(Unicité du développement en série entière)*
Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f \in \mathbb{C}^V$ DSE(0), $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et $U \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ tels que

$$\forall x \in V \cap U \cap]-R, R[; \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $V \cap U \cap]-R, R[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Preuve : Ce déduit du Théorème de régularité de la somme d'une série entière (puisque $f = S$ sur un voisinage de 0).

Définition 4.5.2
1) Soient $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$, $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$ $DSE(0)$, la relation $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, qui est valable au voisinage de 0, est appelée développement en série entière de f en 0 (ou développement de Mac-Laurin de f).

2) De la même façon, la relation $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, qui est valable au voisinage de x_0, est appelée développement en série entière de f en x_0.

Proposition 4.5.2 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $f\ :\ ]-\alpha,\alpha[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $(n,x) \in \mathbb{N}\times]-\alpha,\alpha[$, on considère le reste $R_n(f)(x)$ dans la formule de Taylor avec reste integral appliquée à f entre 0 et x, c.à.d.*

$$R_n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.$$

Pour que f soit DSE(0), il faut et il suffit qu'il existe $\beta \in]0,\alpha]$ tel que

$$\forall x \in]-\beta,\beta[, \qquad R_n(f)(x) \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

Preuve : 1) Supposons que f est DSE(0). La série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est de rayon $R > 0$ et si $\beta = Min(\alpha, R)$ on a

$$\forall x \in]-\beta,\beta[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

et par conséquent

$$\forall x \in]-\beta,\beta[; \quad R_n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

2) Réciproquement, supposons qu'il existe $\beta \in]0,\alpha]$ tel que :

$$\forall x \in]-\beta,\beta[; \quad R_n(f)(x) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0(\text{C.S})$$

on a alors

$$\forall x \in]-\beta,\beta[; \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(x) - R_n(f)(x) \longrightarrow_{n\to+\infty} f(x).$$

Ainsi la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ est de rayon $R > \beta$ et on a

$$R > 0;\ \forall x \in]-\beta,\beta[\cap]-R,R[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

donc f est DSE(0).

Corollaire 4.5.1 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$; $f\ :\ ]-\alpha,\alpha[\longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour que f soit DSE(0), il suffit qu'il existe $(\beta, M) \in]0,\alpha] \times \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall x \in]-\beta,\beta[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

Preuve : On montre facilement que

$$\forall x \in]-\beta,\beta[\quad \forall n \in \mathbb{N};\ *|R_n(f)(x)| \leq \frac{\beta^n}{n!}M \longrightarrow 0.$$

4.5.2 Opérations sur les fonctions DSE

On ne fournit aucune preuve des résultats énoncés dans ce paragraphe.

Proposition 4.5.3 *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, f et g deux fonctions DSE(0), respectivement de développement $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors :*

1. *$\lambda f + g$ est DSE(0) et le DSE(0) est $(\lambda f + g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + b_n) x^n$.*
2. *fg est DSE(0) est le DSE est donné par $fg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) x^n$.*
3. *Si f est DSE(0), alors la dérivée f' de f est DSE(0) et son DSE(0) est obtenue en dérivant termes à termes le DSE(0) de f.*

Corollaire 4.5.2 *Si f est DSE(0), les dérivées successives de f et les "primitives successives" de f sont DSE et les DSE(0) de ces fonctions s'obtient en dérivant ou en primitivant termes à termes le DSE(0) de f.*

4.5.3 Applications : DSE usuels

1) DSE(0) de $f(x) = \exp x$.
La fonction $\exp x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; $f^{(n)}(x) = \exp x$ et on a

$$|R_n(f)(x)| = |\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt| \leq Max(1, \exp x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}; \qquad \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (R = +\infty).$$

2) DSE(0) de $f(x) = \cos x;\ \sin x$.
Les fonctions $\cos x;\ \sin x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}) \text{ et } \sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}).$$

On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |\cos^{(n)}(x)| \leq 1 \text{ et } |\sin^{(n)}(x)| \leq 1.$$

D'après le Corollaire 4.5.1, sin; cos sont DSE(0) et on a

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (R = +\infty)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (R = +\infty)$$

3) DSE(0) de $f(x) = (1+x)^\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1, +\infty[$.
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$; $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$.

$$|\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}| = |\frac{\alpha-n}{n+1}| \longrightarrow 1$$

on peut donc restraindre l'étude de $R_n(f)(x)$ à $]-1, +\infty[\cap]-1, 1[$.
En tenant compte du fait que $\forall t \in [0, x]$; $|\frac{x-t}{t+1}| \le |x|$, en déduit que

$$|R_n(f)(x)| \le \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}|x|^n A(x) \quad \text{où A(x) ne dépend pas de n.}$$

En appliquant le critére de d'Alembert à la série de terme général $u_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}|x|^n$, en déduit qu'elle est convergente et par conséquent

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}|x|^n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$$

et donc

$$|R_n(f)(x)| \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

On conclut alors :

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

Cas particuliers :

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \quad \text{on peut prolonger à } x = 1$$

$$\forall x \in]-1, 1[; \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \quad \text{on peut prolonger à } x = -1.$$

4.6 Travaux dirigés

Université Ibn Zohr
ENSA
C.P.2
2001-2002

Fiche de T.D $N^0 4$
Séries entières

Exercice 4.6.1
Déterminer le rayon de convergence des série entière suivantes :

1. $\sum_{n\geq 0}\left((n^3+n+2)^{\frac{1}{3}}-\sqrt{n^2+1}\right)z^n$
2. $\sum_{n\geq 0}(\ln(n!))\,z^n$
3. $\sum_{n\geq 0}\left(\sqrt{n}\right)^n z^n$
4. $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\cos n}{\sqrt{n+(-1)^n}}\right)z^n$
5. $\sum_{n\geq 1}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}z^n$
6. $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n}+3^{(-1)^n}n\right)^{-1}z^n$

Exercice 4.6.2
1) Soit F une fraction rationnelle $F\ :\ \mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$. Montrer que le série entière $\sum_{n\geq 0}F(n)z^n$ a pour rayon 1.
Que peut-on dire du rayon de convergence des séries $\sum_{n\geq 0}F(n)a_nz^n$ et $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$
2) Déterminer le rayon de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\sin n}{n^2+1}z^n$

Exercice 4.6.3
1) Soit $x\in\mathbb{R}$, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^nx^n$ et calculer sa somme $S(x)$.
2) En déduire les formules suivantes :

$$a)\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\qquad\forall x\in]-1,1]$$

$$b)\ \arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\qquad\forall x\in[-1,1]$$

3) Montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad ch(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\qquad sh(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(Ind : utiliser le DSE de la fonction $\exp x$ à l'origine).

Exercice 4.6.4 *Soit f le prolongement par continuité de la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x-1}$ sur $]0,+\infty[$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.*

Exercice 4.6.5 *Déterminer le développement en série entière à l'origine de la fonction* $\arcsin x$.

Exercice 4.6.6 *x désigne un réel, on considère la série entière* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$

1) Quel est le rayon de convergence de cette série ? on notera pour la suite S sa somme.
2) En remarquant que

$$\frac{nx^n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^n}{(2n)!} - \frac{x^n}{(2n+1)!}\right)$$

montrer que pour tout $x > 0$;

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{(2n)!} - \frac{1}{u}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \qquad \text{où } u = \sqrt{x}$$

3) Montrer que

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\cos\sqrt{-x} - \frac{\sin\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}\right) & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \\ \frac{1}{2}\left(ch\sqrt{x} - \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$