Variables aléatoires réelles discrètes

I Généralités sur les variables aléatoires discrètes

1 *Définition, propriétés*

Définition 1
Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire réelle (VAR) discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :
- $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou une de leurs parties finies.
- pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$

Vocabulaire :
- $X(\Omega)$ est l'**ensemble des valeurs prises par** X.
- Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, on dit que X est une **VAR discrète finie**. Sinon on dit que X est une **VAR discrète infinie**.

Exemple 1:
Un joueur lance deux fois de suite un dé et note les deux nombres obtenus sous la forme d'un couple : par exemple si le joueur obtient 2 puis 5, on note son résultat sous la forme $(2, 5)$. L'univers de notre expérience est $\Omega = [\![1; 6]\!] \times [\![1; 6]\!]$.

On définit la VAR discrète X qui à chaque couple associe la somme des deux nombres obtenus. Ici on a $X(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$. Donc X est une VAR discrète finie.

Exemple 2:
On effectue une succession de lancers d'un dé cubique jusqu'à obtenir 6. Soit X le nombre de lancers effectués.

Il est très difficile ici de décrire l'univers de notre expérience mais on peut tout de même donner très clairement $X(\Omega)$.

En étant rigoureux on devrait écrire : $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ car il se peut que l'on obtienne jamais 6. Mais on peut démontrer que la probabilité de ne jamais obtenir 6 est égale à 0, c'est-à-dire que l'on obtiendra presque sûrement 6. On peut alors choisir de considérer que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc X est une VAR discrète infinie.

Propriété 1
Soit X une VAR discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout J intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in J\}$ est un événement de $\mathcal{A}$ que l'on notera $[X \in J]$.

Cas particuliers :
- Lorsque $J = \{a\}$, on note $[X \in \{a\}] = [X = a] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$. (C'est une des notations de l'on va le plus utiliser)
- Lorsque $J =]-\infty; a]$, on note $[X \leqslant a]$.
- Lorsque $J = [a; b[$ on note $[a \leqslant X < b]$.

Exemple 3:
Revenons au premier exemple où un joueur lance deux fois de suite un dé et X est la somme des deux chiffres obtenus. On a

$$\begin{aligned}
&[X = 2] = \{(1, 1)\} \\
&[X = 4] = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \\
&[X \leqslant 5] = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}
\end{aligned}$$

Dans toute cette partie $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé et X une VAR discrète définie sur cet espace. On note $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou une de leurs parties finies.

Définition 2
On appelle **loi de probabilité** de la VAR discrète X (ou **distribution de** X) l'ensemble de couples (x_i, p_i) où :

$$x_i \in X(\Omega) \quad \text{et} \quad p_i = P([X = x_i])$$

Pour simplifier les notations, on notera $P([X = x_i]) = P(X = x_i)$.

Méthodologie :

Lorsque vous devez répondre à la question « déterminer la loi de X », il faut commencer par donner clairement $X(\Omega)$. Puis pour chaque élément x_i de cet ensemble $X(\Omega)$ il faut donner $P(X = x_i)$.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini et ne contient « pas trop » d'éléments, on peut présenter ses résultats sous forme de tableau avec dans la première ligne les valeur de x_i et dans la deuxième ligne $P(X = x_i)$.

Exemple 4:

On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Ω est l'ensemble des 52 cartes. A chaque carte $\omega \in \Omega$, on associe le réel $X(\omega)$ défini par :
- $X(\omega) = 4$ si ω est un as
- $X(\omega) = 3$ si ω est un roi
- $X(\omega) = 2$ si ω est une dame
- $X(\omega) = 1$ si ω est un valet
- $X(\omega) = 0$ dans tous les autres cas.

Déterminer la loi de X.

• *D'après l'énoncé* $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

• *L'événement* $[X = 0]$ *est l'événement « obtenir un carte qui n'est pas un roi, une dame, un valet ou un as ». Toutes les cartes ayant la même probabilité d'être choisies et comme il y a 36 cartes correspondant à notre événement on a*

$$P(X = 0) = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}$$

• *L'événement* $[X = 1]$ *est l'événement « obtenir un valet » donc* $P(X = 1) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

• *De même* $P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.

Donc on peut donner la loi de X sous la forme :

valeur de X	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
probabilité	$\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

Le résultat suivant est extrêmement important et permet en particulier de vérifier la cohérence des résultats obtenus pour votre loi :

Propriété 2
Soit X une VAR discrète. Si $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ alors la famille d'événements $([X = x_i])_{i \in I}$ est un système complet d'événements.

En particulier on a $\displaystyle\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$

Remarque :

Comme $([X = x_i])_{i\in I}$ est un système complet d'événements, on peut appliquer la formule des probabilité totale pour n'importe quel événement A :

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(X = x_i)P_{[X=x_i]}(A) = \sum_{i\in I} P([X = x_i] \cap A)$$

Il faut aussi être capable, lorsqu'on vous donne des valeurs pour p_i et x_i, de déterminer si ces valeurs sont la loi d'une VAR discrète :

Théorème 1

Soit $\{(x_i, p_i)/i \in I\}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, où $I = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou une de leur partie finie. Si pour tout $i \in I$, $p_i \geqslant 0$ et si $\sum_{i\in I} p_i = 1$ alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une VAR discrète X définie sur Ω tels que $\{(x_i, p_i)/i \in I\}$ est la loi de X.

3 Fonction de répartition

Définition 3

On appelle **fonction de répartition de** X l'application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Propriété 3

La fonction de répartition d'une VAR discrète est une fonction en escalier.

Voyons cela sur un exemple :

Exemple 5:

Reprenons l'exemple 4 et notons F la fonction de répartition de X. On a :

$\forall x \in]-\infty; 0[$, l'événement $[X \leqslant x]$ est impossible car X ne prend que valeurs positives. Donc $F(x) = 0$

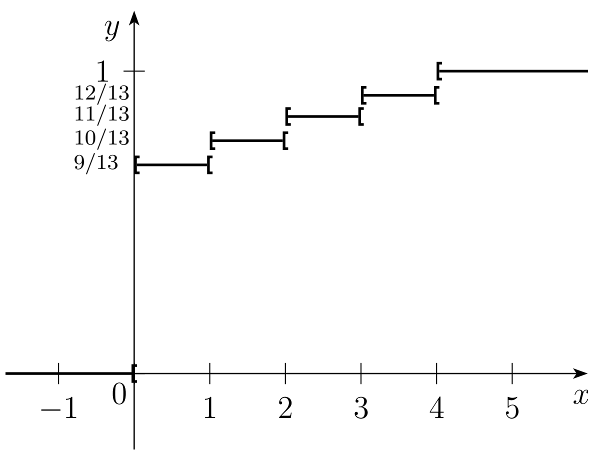
$\forall x \in [0; 1[$, la seul façon d'obtenir $X \leqslant x$ est d'avoir $X = 0$ donc $F(x) = P(X = 0) = \dfrac{9}{13}$

$\forall x \in [1; 2[$, $F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = 0) + P(X = 1) = \dfrac{10}{13}$

$\forall x \in [2; 3[$, $F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{11}{13}$

$\forall x \in [3; 4[$, $F(x) = P(X \leqslant x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \dfrac{12}{13}$

$\forall x \in [4; +\infty[$, $F(x) = 1$



Propriété 4

(i) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0;1]$

(ii) F est croissante.

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

(iv) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $P(a < X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

Démonstration : Hors programme

(i) Provient de la définition d'une probabilité.

(ii) Soit $x \leqslant y$. Alors on a $[X \leqslant x] \subset [X \leqslant y]$ et donc $P(X \leqslant x) \leqslant P(X \leqslant y)$, c'est-à-dire $F(x) \leqslant F(y)$.

(iii) admis

(iv) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $[a < X \leqslant b] = [X \leqslant b] \setminus [X \leqslant a]$ donc grâce aux propriétés des probabilités, $P([a < X \leqslant b]) = F(b) - F(a)$.

$\square$

Théorème 2

Caractérisation de la loi d'une VAR discrète à l'aide de sa fonction de répartition

On rappel que $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$. Si les x_i sont rangés par ordre croissant alors pour tout $x \in I$ tel que $i - 1 \in I$ (on a donc $x_{i-1} < x_i$) on a

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

Exemple 6:

Un sac contient 4 boules numérotés de 1 à 4. On tire deux boules avec remise. On note X_1 le numéro de la première boule, X_2 le numéro de la seconde boule, et Y le plus grand des deux numéros obtenus.

Déterminer la loi de Y.

On remarque tout d'abord que Y prend les valeurs 1,2,3,4 donc $Y(\Omega) = \{1,2,3,4\}$.

De plus, on remarque qu'il est plus facile de calculer $P(Y \leqslant k)$ que $P(Y = k)$. Par exemple

$$\begin{aligned}
[Y = 3] &= ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 3]) \cup ([X_1 = 2] \cap [X_2 = 3]) \cup ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 3]) \cup \\
&\quad ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 2]) \cup ([X_1 = 3] \cap [X_2 = 1]) \\
[Y \leqslant 3] &= [X_1 \leqslant 3] \cap [X_2 \leqslant 3]
\end{aligned}$$

Nous allons donc calculer $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ et $F(4)$ puis en déduire la loi de Y. grâce à la propriété précédente.

- $F(1) = P(Y \leqslant 1) = P(Y = 1) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \dfrac{1}{16}$
- $F(2) = P(Y \leqslant 2) = P([X_1 \leqslant 2] \cap [X_2 \leqslant 2]) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{4}$
- $F(3) = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$
- $F(4) = 1$

On peut maintenant en déduire la loi de la variable Y :

$$P(Y = 1) = F(1) = \frac{1}{16} \quad P(Y = 2) = P(Y \leqslant 2) - P(Y \leqslant 1) = \frac{3}{16}$$

$$P(Y = 3) = P(Y \leqslant 3) - P(Y \leqslant 2) = \frac{5}{16} \quad P(Y = 4) = P(Y \leqslant 4) - P(Y \leqslant 3) = \frac{7}{16}$$

4 Fonction d'une variable aléatoire

Définition 4
Soient X une VAR discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $g(X)$ l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par

$$g(X)(\omega) = g(X(\omega))$$

Propriété 5
Soient X une VAR discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et g une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $Y = g(X)$ est une VAR discrète définie sur Ω et telle que :

$$Y(\Omega) = \{g(x_i)/i \in I\}$$

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{i/g(x_i)=y} P(X = x_i)$$

Exemple 7:
Soit X une VAR dont la loi est définie par :

valeur de X	-1	1	2
probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Déterminer la loi de $Y = 2X + 1$ et $Z = X^2$.
• $Y(\Omega) = \{-1; 3; 5\}$ *et*

$$P(Y = -1) = P(X = -1) = \frac{1}{4}$$
$$P(Y = 3) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$
$$P(Y = 5) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

• $Z(\Omega) = \{1; 4\}$ *et*

$$P(Z = 1) = P([X = 1] \cup [X = -1]) = P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{3}{4}$$
$$P(Z = 4) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

5 Moments d'une VAR discrète

Dans ce paragraphe $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, X une VAR discrète, $X(\Omega) = \{x_i/i \in I\}$ avec $I = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou une de leurs parties finies, et $p_i = P(X = x_i)$, pour tout $i \in I$.

a Espérance

Définition 5
On dit que X **admet une espérance**, ou que **l'espérance de X existe**, lorsque $X(\Omega)$ est fini ou lorsque la série $\sum x_i P(X = x_i)$ est absolument convergente.

On appelle alors **espérance de X**, le réel $E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i)$.

Remarques :

– $E(X)$ est une moyenne pondérée des valeurs prises par X.
– On note parfois :$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$.
– Lorsque X est une VAR discrète finie, X admet forcément une espérance.
– Si pour tout $i \in I$, $a \leqslant x_i \leqslant b$ alors $a \leqslant E(x) \leqslant b$ (Moyen de vérifier la cohérence de votre résultat).
– En particulier si pour tout i, $x_i \geqslant 0$ alors $E(x) \geqslant 0$.

Exemple 8:
Reprenons l'exemple 4 : la loi de X est

valeur de X	0	1	2	3	4
probabilité	$\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{13}$

X est une VAR discrète finie donc X admet une espérance.
De plus, $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = 0 \times \frac{9}{13} + 1 \times \frac{1}{13} + 2 \times \frac{1}{13} + 3 \times \frac{1}{13} + 4 \times \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$
On remarque que l'on a bien $0 \leqslant E(X) \leqslant 4$.

Voici l'un des théorème les plus important sur l'espérance, le **théorème de transfert** :

Théorème 3
Si $X(\Omega)$ est fini ou si la série $\sum g(x_i)P(X = x_i)$ converge alors la VAR $g(X)$ admet une espérance et on a :

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$

Exemple 9:
Soit X la VAR de l'exemple 4, on considère la VAR $Z = 2X^2 - 1$. Calculons $E(Z)$.
Comme X est une VAR discrète finie, Z en est aussi une et donc Z admet une espérance.
D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(2X^2 - 1) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} (2x^2 - 1)P(X = x) \\ &= (2 \times 0^2 - 1) \times \frac{9}{13} + (2 \times 1^2 - 1) \times \frac{1}{13} + (2 \times 2^2 - 1) \times \frac{1}{13} + (2 \times 3^2 - 1) \times \frac{1}{13} + (2 \times 4^2 - 1) \times \frac{1}{13} \\ &= \frac{47}{13} \end{aligned}$$

Corollaire 1
Si X admet une espérance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Définition 6
Si X est une variable aléatoire telle que $E(X) = 0$, on dit que **X est une variable centrée**.

Propriété 6
Soit X une VAR discrète admettant une espérance $E(X)$. La variable aléatoire $X - E(X)$ est une VAR discrète centrée appelée **la variable aléatoire centrée associée à** X.

b Moment d'ordre r

Définition 7
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X^r admet une espérance alors on dit que X admet un **moment d'ordre** r qui est le réel $m_r(X) = E(X^r)$.

Remarques :

- Grâce au théorème de transfert, en cas de convergence, on a $E(X^r) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} x^r P(X = x)$
- Le moment d'ordre 1 est l'espérance
- Toutes les VAR discrètes finies admettent des moments d'ordre r pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.

Propriété 7
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre r alors X admet des moments d'ordre s pour tout $s \in [\![1; r]\!]$.

Corollaire 2
Si $E(X^2)$ existe alors $E(X)$ existe

Attention la réciproque à cette propriété est fausse.
Exemple 10:
on considère la VAR X dont la loi est donnée par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $P(X = n) = \dfrac{1}{\lambda n^3}$ avec $\lambda = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.
On a $nP(X = n) = \dfrac{1}{\lambda n^2}$ donc $\sum |nP(X = n)|$ converge et $E(X)$ existe.
De plus $n^2 P(X = n) = \dfrac{1}{\lambda n}$ donc $\sum |n^2 P(X = n)|$ diverge et $E(X^2)$ n'existe pas.

c Variance et écart type

Définition 8
Soit X une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable $X - E(X)$ admet un moment d'ordre 2. On appelle **variance de** X le réel :

$$V(X) = E\left((X - E(x))^2\right)$$

De plus lorsque $V(X)$ existe, on appelle **écart-type de** X le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Remarques :
- Si X n'admet pas d'espérance, X ne peut pas admettre de variance.
- La variance est la moyenne du carré de la distance entre les valeurs de X et la moyenne de X. La variance est donc une mesure de dispersion de X par rapport à $E(X)$.

Théorème 4
Formule de Huygens ou de Kœnig
Soit X une VAR discrète. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Remarque :
En pratique, on utilise 99 fois sur 100 cette formule pour calculer une variance.

Exemple 11:

Reprenons l'exemple 8. On a calculé $E(X) = \dfrac{10}{13}$. De plus

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) = 0^2 \times \frac{9}{13} + 1^2 \times \frac{1}{13} + 2^2 \times \frac{1}{13} + 3^2 \times \frac{1}{13} + 4^2 \times \frac{1}{13} = \frac{30}{13}$$

Donc on en déduit que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{30}{13} - \dfrac{100}{169} = \dfrac{290}{169}$.

Propriété 8

Si X est une VAR discrète admettant une variance alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Définition 9

Si X est une VAR discrète admettant une variance et telle que $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable centrée réduite.

Propriété 9

Soit X une VAR discrète admettant une variance non nulle. La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est une VAR discrète centrée réduite appelée la **variable aléatoire centrée réduite associé à** X.

La variable centrée réduite associée à X nous sera très utile dans le chapitre sur la convergence de suites de VAR et dans le chapitre sur les estimations.

II Lois discrètes usuelles

1 Lois discrètes finies

a Loi de Bernoulli (ou indicatrice d'événement)

Mise en place :

On considère une expérience aléatoire e et A un événement lié à cette expérience tel que $P(A) = p$. On définit alors la variable aléatoire X en posant $X = 1$ si A est réalisé et $X = 0$ sinon.

X est une VAR qui prend les valeurs 0 et 1 avec la probabilité $P(X = 0) = 1 - p$ et $P(X = 1) = p$.

Définition 10

Soit $p \in [0; 1]$. On dit qu'une VAR X suit la **loi de Bernoulli de paramètre p (notée $\mathcal{B}(1, p)$)** si :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}$$

$$P(X = 0) = 1 - p \qquad \text{et} \qquad P(X = 1) = p$$

Propriété 10

Si X suit une loi de Bernoulli alors

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1 - p)$$

b Loi binomiale (ou des tirages avec remise)

Mise en place :

On considère une expérience e et on considère un événement A lié à e tel que $P(A) = p$. On suppose que l'on effectue n fois l'expérience e dans les même conditions et on considère X le nombre de fois où A est réalisé au cours de ces n expériences identiques.

X prend donc les valeurs $0, 1, ..., n$.

Soit $k \in [\![0; n]\!]$. On cherche à calculer $P(X = k)$ c'est-à-dire la probabilité que A soit réalisé k fois exactement. Parmi les n expériences, il y a $\binom{n}{k}$ façon de placer les k fois où A est réalisé. Chacun de ces $\binom{n}{k}$ événement est réalisé avec la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$.

On a donc : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

Définition 11

Soit $p \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que la VAR X suit la **loi binomiale de taille n et de paramètre p (notée $\mathcal{B}(n, p)$)** si :

$$X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\} = [\![0; n]\!]$$

$$\forall k \in [\![0; n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Un VAR qui suit une loi binomiale est une VAR qui « compte le nombre de réalisation d'un événement A de probabilité p au cours de n expériences identiques. »

Propriété 11

Soit X une VAR qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Alors on a :

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p)$$

Théorème 5

La somme de n VAR de Bernoulli indépendantes, de même paramètre p, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

c Loi hypergéométrique (ou des tirages sans remise)

Mise en place :

On considère une boite dans laquelle sont placées N boules : il y a M boules blanches et $N - M$ boules rouges. On effectue alors n tirages sans remise ($n \leqslant N$) et on appelle X le nombre de boules blanches obtenues.

X prend la valeur k si : $0 \leqslant k \leqslant M$ et $0 \leqslant n - k \leqslant N - M$, c'est-à-dire si

$$\max(0, n - N + M) \leqslant k \leqslant \min(M, n)$$

Toutes les façons de tirer n boules parmi les N sont équiprobables donc on peut calculer la probabilité $P(X = k)$ grâce à la formule $\dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

• Tout d'abord il y a $\binom{N}{n}$ façon de choisir n boules parmi les N.

• Un cas favorable signifie que l'on a choisit k boules blanches parmi les M et $n - k$ boules rouges parmi les $N - M$. Donc le nombre de cas favorables est $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$.

• On a donc :

$$P(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Définition 12
Soit N et n des entiers tels que $n \leqslant N$ et $p \in [0;1]$ tel que Np est un entier.
On dit qu'une VAR X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p (notée $\mathcal{H}(N,n,p)$) si :

$$X(\Omega)=[\![\max(0,n-N+M);\min(M,n)]\!]$$

$$\forall k \in X(\Omega), \quad P(X=k)=\frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Propriété 12
Si X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ alors :

$$E(X)=np$$

d Loi uniforme

Définition 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme sur** $[\![1;n]\!]$ si :

$$X(\Omega)=[\![1;n]\!]$$

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad P(X=k)=\frac{1}{n}$$

Tous les événements $[X=k]$ sont donc équiprobables.

Propriété 13
Soit X une VAR qui suit la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$. Alors :

$$E(X)=\frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{n^2-1}{12}$$

Démonstration :

• $E(X)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n} k\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$

• On sait que $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.
Or $E(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{n} k^2\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$
Donc $V(X)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$.

$\square$

2 Lois discrètes infinies

a Loi géométrique (ou loi d'attente d'un premier succès dans un processus sans mémoire)

Mise en place :

On considère une expérience aléatoire e et un événement A lié à e tel que $P(A) = p$. On répète l'expérience e dans des conditions identiques (les expériences sont indépendantes) et on appelle X le nombre d'épreuves effectuées jusqu'à ce que A soit réalisé pour la première fois.

On note A_i l'événement « A est réalisé a cours de la i^{eme} expérience ».

Soit R l'événement « A ne réalise jamais ». On a $R = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Donc

$$P(R) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right) = \lim_{n\to+\infty} (1-p)^n = 0$$

On peut donc considérer que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = n) = P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n) = (1-p)^{n-1}p$$

Définition 14

Soit $p \in]0;1[$. On dit qu'une VAR X suit **la loi géométrique de paramètre** p **(notée** $\mathcal{G}(p)$**)** si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1-p)^{n-1}p$$

Propriété 14

Soit X une VAR qui suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Alors :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

b Loi de Poisson

Définition 15

Soit $\lambda > 0$. On dit qu'une VAR X suit une **loi de Poisson (notée** $\mathcal{P}(\lambda)$**)** si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

On ne dispose pas ici d'une situation concrète simple pour illustrer la loi de Poisson. Une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson sera toujours introduite sous la forme « soit X une VAR qui suit une loi de Poisson. »

Propriété 15

Soit X une VAR qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$