Exercices : VAR discrètes

Exercice 1:

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne.

Soit X le nombre de tirages nécessaires. Quelle est la loi de X ?

Exercice 2:

On considère un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, truqué de sorte que la probabilité d'obtenir la face numéro k soit proportionnelle à k, avec pour coefficient de proportionnalité le réel p.

On lance une fois le dé et on note X le numéro de la face obtenue.

1. Déterminer la loi de X (en fonction de p).
2. Déterminer la valeur de p.
3. Calculer $E(X)$
4. On pose $Y = \dfrac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 3:

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges.

On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $E(X)$.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Exercice 4:

1. Soit X une VAR discrète prenant les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 avec les probabilités respectives 0,1 ; 0,2 ; 0,1 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,2. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit Y une VAR discrète prenant les valeurs 3,4,5,6.

   Déterminer la loi de Y sachant que :

   $$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 3) = P(Y = 4)$$

   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 5:

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne suivant le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer la loi de X_1.
2. Déterminer la loi de X_2.
3. Conjecturer la loi de X_n et démontrer ce résultat par récurrence sur n.

Exercice 6:

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc 2 rois rouges. On envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I. Premier protocole

Les cartes sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. A chaque fois que le joueur découvre une carte, il paie 1 euro et lorsqu'il découvre le premier roi rouge il gagne a euros (où $a \in \mathbb{N}^*$).

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$. $\left(\underline{\text{Rappel :}} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\right)$
3. Exprimer G_1 en fonction de X et en déduire $E(G_1)$

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

X désigne toujours le rang d'apparition du premier roi rouge et on note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.
2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.
3. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Exercice 7:

On joue à pile ou face avec une pièce non équilibrée. A chaque lancer la probabilité d'obtenir face est égale à $\dfrac{1}{3}$.

Les lancers sont supposés indépendants. On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux piles consécutifs. Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $[X = n]$.

On note de plus F_i l'événement « obtenir face au i-ème lancer ».

1. Expliciter les événements $[X = 2]$, $[X = 3]$, $[X = 4]$, $[X = 5]$ à l'aide des événements F_i et $\overline{F_i}$
   Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.
2. A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :
$$\forall n \geqslant 3, \quad p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$$
3. En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$.
4. Calculer $E(X)$.

Exercice 8:

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne.

On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1$.
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}$
5. En déduire $E(Y)$.

Exercice 9:

Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées 0, 1, 2, ... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, et calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On appelle Y_n la VAR égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de probabilité de X_n, puis $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 10:

Le service de dépannage d'un grand magasin dispose d'équipes intervenant sur appel de la clientèle. Pour des causes diverses les interventions ont lieu parfois avec retard. On admet que les appels se produisent indépendamment les uns des autres et que, pour chaque appel, la probabilité d'un retard est $0,25$.

1. Un client appelle le service à quatre reprises. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de fois où ce client a dû subir un retard.
   a) Déterminer la loi de probabilité de X, l'espérance et la variance de X.
   b) Calculer la probabilité de l'événement : le client a subit au moins un retard.
2. Au cours des années 1998 et 1999 le service après-vente enregistre une succession d'appels.
   Le rang du premier appel pour lequel l'intervention s'effectue avec retard en 1998 (resp. 1999) définit une variable aléatoire Y (resp. Z).
   a) Déterminer les lois de Y et Z.
   b) Calculer $P(Y \leqslant k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   c) On pose $T = \max(Y, Z)$
      (i) Calculer $P(T \leqslant k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. (On rappelle que $[T \leqslant k] = [Y \leqslant k] \cap [Z \leqslant k]$)
      (ii) Déterminer la loi de T.
      (iii) Calculer l'espérance de T.

Exercice 11:

Un concierge possède un trousseau de 10 clés dont une seule permet d'ouvrir la porte qu'il a en face de lui. Soit X le nombre de clés essayées pour ouvrir la porte.

1. Déterminer la loi de X (envisager 2 cas : avec ou sans remise)
2. Le concierge est ivre un jour sur trois, et quand il est ivre, il essaie les clés au hasard avec remise, sinon il procède sans remise. Sachant qu'un jour 8 essais ont été nécessaires pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité que le concierge ait été ivre ce jour là ?

Correction

Exercice 1:

Afin de n'avoir plus que des boules d'une seule couleur dans l'urne il faut au minimum qu'on ai tiré deux boules (les deux blanches) et lorsqu'on aura tiré 5 boules on sera certain qu'il n'y aura plus qu'une seule couleur dans l'urne. On a donc $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$.

Pour plus de clarté notons B_i l'événement « au i-ème tirage on obtient une boule blanche » et N_i l'événement « au i-ème tirage on obtient une boule noire ».

- On a $[X = 2] = B_1 \cap B_2$ donc d'après la formule des probabilités composées $P(X = 2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15}$.
- On a $[X = 3] = (B_1N_2B_3) \cup (N_1B_2B_3)$ donc comme on a une union de deux événements incompatibles et d'après la formule des probabilités composées, $P(X = 3) = \dfrac{2}{6} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{15}$
- On a $[X = 4] = (N_1N_2B_3B_4) \cup (N_1B_2N_3B_4) \cup (B_1N_2N_3B_4) \cup (N_1N_2N_3N_4)$ donc comme on a une union de quatre événements incompatibles et d'après la formule des probabilités composées, $P(X = 4) = \dfrac{4}{15}$.
- On sait que $([X = 2], [X = 3], [X = 4], [X = 5])$ est un système complet d'événements donc $P(X = 5) = 1 - P(X = 2) - P(X = 3) - P(X = 4) = \dfrac{8}{15}$.

Exercice 2:

1. D'après l'énoncé $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et pour tout $k \in X(\Omega)$ on a $P(X = k) = p \times k$.
2. On sait que $([X = 1], [X = 2], [X = 3], [X = 4], [X = 5], [X = 6])$ est un système complet d'événements donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X = k) = 1$. On a donc :
$$p(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1 \Leftrightarrow p \times \frac{6 \times 7}{2} = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{21}$$
3. X est une VAR discrète finie donc elle admet une espérance et on a
$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{21} \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = \frac{13}{3}$$
4. On a $Y(\Omega) = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{6}\right\}$ et pour tout $x \in Y(\Omega)$ on a $x = \dfrac{1}{k}$ avec $k \in X(\Omega)$ et donc $P(Y = x) = P(X = k) = \dfrac{k}{21} = \dfrac{1}{21x}$.
   Y est une VAR discrète finie donc elle admet une espérance et on a d'après le théorème de transfert $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{k} P(X = k) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Exercice 3:

Pour plus de clarté on note B_i l'événement « au i-ème tirage on obtient une boule blanche » et R_i l'événement « au i-ème tirage on obtient une boule rouge ».

1. a) La première boule blanche peut apparaitre au plus tôt au premier tirage et au plus tard au tirage numéro $n - 1$, donc $X(\Omega) = [\![1; n - 1]\!]$.
   Soit $k \in X(\Omega)$.
   - Si $k = 1$, $[X = 1] = B_1$ donc $P(X = 1) = \dfrac{2}{n}$.

• Si $k \geqslant 2$, l'événement $[X=k]$ signifie que les $k-1$ premier tirages ont donnés des boules rouges et le k-ième a donné une boule blanche. Donc $[X=k] = R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k$. D'après la formule des probabilités composées on a

$$P(X=k) = \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

En conclusion pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

b) X est une VAR discrète finie donc elle admet une espérance et on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k(n-k)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{2}{n-1} \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n+1}{3} \end{aligned}$$

2. Lorsque la première boule blanche apparait au tirage numéro X cela signifie que tout les tirage précédents ont donné des boules rouges donc que l'on a retiré $X-1$ boules rouges de l'urne. Ainsi il reste $n-2-(X-1)$ boules rouges dans l'urne. Donc on a $Y = n-2-(X-1) = n-X-1$.
   On en déduit donc que Y admet une espérance et que $E(Y) = n - E(X) - 1 = \dfrac{2n-4}{3}$.

Exercice 4:

1. X est une VAR discrète finie donc X admet une espérance et

$$E(X) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 + 4 \times 0,3 + 5 \times 0,1 + 6 \times 0,2 = 3,7$$

   X^2 est aussi une VAR discrète finie donc X^2 admet une espérance et donc X admet une variance. D'après le théorème de transfert :

$$E(X^2) = 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,1 + 4^2 \times 0,3 + 5^2 \times 0,1 + 6^2 \times 0,2 = 16,3$$

   On en déduit, d'après le formule de Huygens que $V(X) = 16,3 - (3,7)^2 = 2,61$.

2. a) On a $Y(\Omega) = \{3,4,5,6\}$.

   • On a donc $P(Y > 5) = P(Y=6) = \dfrac{1}{2}$

   • On a aussi $P(Y<5) = P(Y=3) + P(Y=4) = 2P(Y=3)$ car $P(Y=3) = P(Y=4)$ donc on en déduit que $P(Y=3) = P(Y=4) = \dfrac{1}{6}$

   • Enfin on a $P(Y=5) = 1 - P(Y=3) - P(Y=4) - P(Y=6) = \dfrac{1}{6}$.

   b) Comme Y est une VAR discrète finie, elle admet une espérance et après calcul on a $E(Y) = 5$. De plus Y^2 est aussi une VAR discrète finie, donc Y admet un moment d'ordre 2 et donc une variance. De plus $E(Y^2) = \dfrac{79}{3}$ et donc d'après la formule de Huygens $V(Y) = \dfrac{4}{3}$.

Exercice 5: Assez difficile

On note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i-ième tirage » et R_i l'événement « on obtient une boule rouge au i-ième tirage ».

1. $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$, $P(X_1 = 0) = \dfrac{1}{2}$ et $P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.
2. $X_2(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.
   $P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$
   $P(X_2 = 1) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(R_2) + P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \dfrac{1}{3}$
   $P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$
3. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$ »est vraie pour tout entier n non nul.
   • La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.
   • Soit n un entier non nul fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Après le n-ième tirage, d'après le protocole de l'expérience il y a au plus $n+1$ boules blanches dans l'urne donc $X_{n+1}(\Omega) = [\![0; n+1]\!]$. (Au total il y a $n+2$ boules dans l'urne)
   – $P(X_{n+1} = 0) = P([X_n = 0] \cap R_{n+1}) = P(X_n = 0) \times P_{[X_n=0]}(R_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$.
   – Soit $k \in [\![1; n]\!]$. Pour que l'on obtienne k boules blanches au cours des $n+1$ premier tirages, il faut avoir obtenus soit $k-1$ soit k boules blanches au cours des n premier tirages. Donc :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P([X_n = k-1] \cap B_{n+1}) + P([X_n = k] \cap R_{n+1}) \\ &= P(X_n = k-1)P_{[X_n=k-1]}(B_{n+1}) + P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(R_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+2-(k+1)}{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

   – $P(X_{n+1} = n+1) = P([X_n = n] \cap B_{n+1}) = P(X_n = n) \times P_{[X_n=n]}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} \times \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{1}{n+2}$
   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   • Grace au principe de récurrence on a montré que pour tout entier n non nul, $X_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 6: Extrait EML 2000

On note R_k l'événement « la carte obtenue au k-ième essai est un roi rouge ».

I. Premier protocole

1. • On peut au mieux obtenir le premier roi rouge à la première carte et au pire on obtiendra forcément un roi rouge à la $2n-1$-ième carte. Donc $X(\Omega) = [\![1; 2n-1]\!]$.
   • Pour tout $k \in X(\Omega)$, si $k \neq 1$, on peut écrire l'événement $[X = k]$ de la façon suivante :

$$[X = k] = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap ... \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$$

   A l'aide de la formule des probabilités composées, on peut calculer :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{2n-2}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-1} \times ... \times \frac{2n-k}{2n-k+2} \times \frac{2}{2n-k+1} \\ &= \frac{2n-k}{n(2n-1)} \end{aligned}$$

De plus $P(X=1)=P(R_1)=\dfrac{2}{2n}=\dfrac{1}{n}$. (On remarque que la formule du dessus fonctionne en fait aussi pour $k=1$.)

2. X est une VAR discrète finie, donc X admet une espérance et :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X=k)\\
&= \frac{2n}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{2n-1} k - \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{2n-1} k^2\\
&= \frac{2n}{n(2n-1)}\times\frac{(2n-1)2n}{2} - \frac{1}{n(2n-1)}\times\frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6}\\
&= 2n-\frac{4n-1}{3}\\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

3. On peut exprimer G_1 en fonction de X, par $G_1=a-X$ car lorsque $X=k$ cela signifie qu'on a retourné k cartes donc on a perdu k euros et qu'on a eu le roi rouge donc qu'on a gagné a euros. Donc $E(G_1)=a-E(X)$ et donc $E(G_1)=a-\dfrac{2n+1}{3}$.

II. Deuxième protocole

1. Lorsque $G_2=a-k$, cela signifie que $X=k$, donc $P(G_2=a-k)=P(X=k)=\dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

2. Comme la somme totale des probabilité doit valoir 1, on a $P(G_2=-n)=1-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(G_2=a-k)$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}P(G_2=a-k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2n}{n(2n-1)}-\frac{k}{n(2n-1)}=\frac{2n\times n}{n(2n-1)}-\frac{n(n+1)}{2n(2n-1)}=\frac{4n-(n+1)}{2(2n-1)}=\frac{3n-1}{2(2n-1)}$

Donc on en déduit que $P(G_2=-n)=1-\dfrac{3n-1}{2(2n-1)}=\dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

3.

$$\begin{aligned}
E(G_2) &= \sum_{k=1}^{n}(a-k)P(G_2=a-k)-nP(G_2=-n)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n}(a-k)(2n-k)-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(2an-(a+2n)k+k^2\right)-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&= \frac{2an}{n(2n-1)}\times n-\frac{a+2n}{n(2n-1)}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n(2n-1)}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\\
&= \frac{12an-3(a+2n)(n+1)+(n+1)(2n+1)-3n(n-1)}{6(2n-1)}\\
&= \frac{3a(4n-n-1)-6n^2-6n+2n^2+3n+1-3n^2+3n}{6(2n-1)}\\
&= \frac{3a(3n-1)-(7n^2-1)}{6(2n-1)}
\end{aligned}$$

III Comparaison des deux protocoles

Avec $n=16$, on obtient $E(G_1)=a-11$ et $E(G_2)=\dfrac{141a-1791}{186}=\dfrac{47}{62}a-\dfrac{597}{62}$

On cherche à comparer selon les valeurs de a, $E(G_1)$ et $E(G_2)$. On calcule donc

$$E(G_1)-E(G_2)=\frac{15}{62}a-\frac{85}{62}$$

On voit donc que si $a\geqslant\dfrac{85}{15}\approx 5,6$ alors le premier protocole est le plus favorable. Dans le cas contraire c'est le deuxième protocole qui est le plus favorable.

Exercice 7: Difficile

1. – $[X=2]=\overline{F_1}\cap\overline{F_2}$ donc $p_2=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$ (car les lancers sont indépendants)
   – $[X=3]=F_1\cap\overline{F_2}\cap\overline{F_3}$ donc $p_3=\dfrac{4}{27}$
   – $[X=4]=(F_1\cap F_2\cap\overline{F_3}\cap\overline{F_4})\cup(\overline{F_1}\cap F_2\cap\overline{F_3}\cap\overline{F_4})$ donc $p_4=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{27}$
   – $[X=5]=(F_1\cap F_2\cap F_3\cap\overline{F_4}\cap\overline{F_5})\cup(F_1\cap\overline{F_2}\cap F_3\cap\overline{F_4}\cap\overline{F_5})\cup(\overline{F_1}\cap F_2\cap F_3\cap\overline{F_4}\cap\overline{F_5})$ donc $p_5=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{243}$
2. $(F_1,\overline{F_1})$ est un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales, on a

$$p_n=P(F_1)P_{F_1}(X=n)+P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(X=n)$$

   Or, sachant que F_1 est réalisé, obtenir $[X=n]$ revient à obtenir deux piles consécutifs au $n-1$-ième lancer (l'obtention de face au premier lancer n'influence pas la suite) donc $P_{F_1}(X=n)=P(X=n-1)=p_{n-1}$.
   De plus, sachant que $\overline{F_1}$ est réalisé, on doit nécessairement obtenir F_2 et ensuite cela revient à obtenir deux piles consécutifs au $n-2$-ième lancer. Donc $P_{\overline{F_1}}(X=n)=\dfrac{1}{3}P(X=n-2)=\dfrac{1}{3}p_{n-2}$.
   On a donc bien $p_n=\dfrac{1}{3}p_{n-1}+\dfrac{2}{9}p_{n-2}$.
3. (p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 telle que $p_1=0$ et $p_2=\dfrac{4}{9}$.
   Équation caractéristique : $x^2-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{9}=0$ de solutions $x_1=\dfrac{2}{3}$ et $x_2=-\dfrac{1}{3}$.
   On a donc $p_n=A\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+B\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ et on calcule A et B grâce à p_1 et p_2.
   En conclusion on a $p_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+\dfrac{4}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.
4. X admet un espérance car la série $\sum np_n$ est la somme de deux séries dérivées premières de la série géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$. On a :

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{4}{3}n\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)\\&=\frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-\frac{4}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{4}{9}\frac{1}{(1-2/3)^2}-\frac{4}{9}\frac{1}{(1+1/3)^2}\\&=\frac{15}{4}\end{aligned}$$

Exercice 8: Extrait ECRICOME 2002

1. X compte le nombre de réalisations de l'événement « obtenir une boule blanche » qui est de probabilité $\dfrac{1}{2}$ au cours de n réalisations d'une expérience dans les mêmes conditions. X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$ et on a donc $X(\Omega) = [\![0;n]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = \dbinom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$.

   On en déduit que $E(X) = \dfrac{n}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n}{4}$.
2. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. L'événement $[Y=k]$ signifie que l'on a obtenu au cours des k premiers tirages, $k-1$ boules noires puis une boule blanche. Le reste des tirages est quelconque. On a donc :

$$P(Y=k) = \frac{1}{2^{k-1}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

   L'événement $Y=0$ signifie que l'on a obtenu n boules noires, donc $P(Y=0) = \dfrac{1}{2^n}$.
3.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \times \frac{1-1/2^n}{1-1/2}\\ &= \frac{1}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n} = 1\end{aligned}$$
4. Montrons par récurrence que la propriété « $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \neq 1, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   • Pour $n=1$, $\dfrac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x^3-2x^2+x}{(1-x)^2} = \dfrac{x(1-x)^2}{(1-x)^2} = x$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

   • Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1}\\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} + (n+1)x^{n+1}\\ &= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}-2(n+1)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{(n+1)x^{n+3}-(n+2)x^{n+2}+x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

   Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On en déduit donc que notre propriété est vraie pour tout n.
5.
$$\begin{aligned}E(Y) &= 0 \times \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\\ &= \frac{n\frac{1}{2^{n+2}} - (n+1)\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{1/4} = -\frac{n+2}{2^n} + 2\end{aligned}$$

Exercice 9:

1. Après 1 saut, la puce est soit sur la case 1 soit sur la case 2, donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$. De plus d'après l'énoncé $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

   Donc X_1 suite une loi uniforme sur $[\![1; 2]\!]$ et ainsi $E(X_1) = \dfrac{3}{2}$ et $V(X_1) = \dfrac{4-1}{12} = \dfrac{1}{4}$.
2. Y_n est la VAR qui compte le nombre de réalisations de l'événement « la puce saute d'une case »(qui est de probabilité $\dfrac{1}{2}$) au cours de n expériences (n sauts) qui se réalisent dans des conditions identiques.

   Y_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{2}$.

   On a donc $Y_n(\Omega) = [\![0; n]\!]$ et pour tout $k \in Y_n(\Omega)$, $P(Y_n = k) = \binom{n}{k}\dfrac{1}{2^n}$.

   De plus d'après le cours $E(Y_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(Y_n) = \dfrac{n}{4}$
3. Lorsque $Y_n = k$ cela signifie qu'au cours de ses n sauts la puce a fait k sauts d'une case et $n-k$ sauts de 2 cases donc elle est arrivée à la case numéro $k+2(n-k)$ c'est-à-dire $X_n = k+2(n-k) = 2n-k$. On a donc $X_n = 2n - Y_n$ et on peut en déduire que $X_n(\Omega) = [\![n; 2n]\!]$ et pour tout $k \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_n = k) = P(Y_n = 2n-k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{2n-k}$$

   De plus $E(X_n) = 2n - E(Y_n) = \dfrac{3n}{2}$ et $V(X_n) = (-1)^2 V(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.

Exercice 10:

On note R l'événement « l'intervention a lieu avec un retard ».

1. a) X est la VAR qui compte le nombre de réalisations de l'événement R, qui est de probabilité $\dfrac{1}{4}$, au cours de 4 réalisations d'une même expérience. X suit donc une loi binomiale de paramètres 4 et $\dfrac{1}{4}$.

   On a donc $X(\Omega) = [\![0; 4]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = \binom{4}{k}\dfrac{1}{4^k}\dfrac{3^{4-k}}{4^{4-k}}$

   De plus $E(X) = 1$ et $V(X) = \dfrac{3}{4}$.

   b) L'événement demandé est l'événement $[X \geqslant 1] = \overline{[X=0]}$ donc $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = \dfrac{175}{256}$.
2. a) Y et Z sont les VAR qui donnent le rang d'apparition pour la première fois de l'événement R lorsqu'on répète indéfiniment la même expérience. Y et Z suivent donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{4}$.

   On a donc $Y(\Omega) = Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = k) = P(Z = k) = \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-1}$.

   b) $P(Y \leqslant k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} P(Y = i) = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} = \frac{1}{4}\frac{1-(3/4)^k}{1-3/4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k$

   c) (i) On a $[T \leqslant k] = [Y \leqslant k] \cap [Z \leqslant k]$ et comme Y et Z sont indépendantes, on a

$$P(T \leqslant k) = P(Y \leqslant k) \times P(Z \leqslant k) = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)^2$$

(ii) On a tout d'abord $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in T(\Omega)$.
Si $k \geqslant 2$ $P(T = k) = P(T \leqslant k) - P(T \leqslant k-1)$ donc

$$\begin{aligned}
P(T=k) &= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)^2 \\
&= \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k - 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4} + 1\right)\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4} \times \left(2 - \frac{7}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

De plus $P(T = 1) = P(T \leqslant 1) = \dfrac{1}{16}$. (On remarque que la formule avec $k \geqslant 2$ est en fait vraie pour $k = 1$)

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} kP(T=k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} - \frac{7}{16}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{9}{16}\right)^{k-1}$$

Donc la série $\sum kP(T = k)$ converge (série dérivée série géom.) donc T admet une espérance et

$$E(T) = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-3/4)^2} - \frac{7}{16}\frac{1}{(1-9/16)^2} = \frac{40}{7}$$

Exercice 11:

1. a) <u>Avec remise :</u>
   X est la VAR qui déterminer le rang d'apparition pour la première fois de l'événement « la clé choisie est la bonne » au cours de réalisations successive de la même expérience (essayer une clé).
   X suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{10}$. On a donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in X(\Omega)$
   $P(X = k) = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{9}{10}\right)^{k-1}$.

   b) <u>Sans remise :</u>
   On a ici $X(\Omega) = [\![1; 10]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, si on note M_k l'événement « la clé essayée au k-ième essai est mauvaise » on a $[X = k] = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_{k-1} \cap \overline{M_k}$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$P(X=k) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \cdots \times \frac{10-k+1}{10-k+2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$$

   X suit en fait une loi uniforme sur $[\![1; 10]\!]$.

2. On note I l'événement « le concierge est ivre ». On cherche donc $P_{[X=8]}(I)$.
   $(I, \overline{I})$ est un système complet d'événements donc d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
P_{[X=8]}(I) &= \frac{P(I)P_I(X=8)}{P(I)P_I(X=8) + P(\overline{I})P_{\overline{I}}(X=8)} \\
&= \frac{1/3 \times (9/10)^7 \times 1/10}{1/3 \times (9/10)^7 \times 1/10 + 2/3 \times 1/10} \\
&= \frac{(9/10)^7}{(9/10)^7 + 2} \approx 0,193
\end{aligned}$$