Couples et suites de VAR discrètes

I Couple de VAR discrètes

Dans toute cette partie X et Y désigneront deux VAR discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On notera $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$ où I et J désignent $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou une de leurs parties finies.

1 Loi d'un couple

Définition 1
On appelle **couple de VAR discrète** et on note (X, Y) toute application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$.

Définition 2
On appelle **loi du couple de VAR discrètes** (X, Y), ou encore **loi conjointe des variables aléatoires** X **et** Y, l'ensemble des couples $((x_i, y_j), p_{i,j})$ où

$$x_i \in X(\Omega), \quad y_j \in Y(\Omega), \quad p_{i,j} = P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Remarques :
- Lorsque cela sera possible, on présentera la loi de (X, Y) sous forme d'un tableau à double entrée.
- Lorsqu'on vous demande la loi du couple (X, Y) il faut toujours commencer par rappeler $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ puis il faut donner la valeurs de $P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$ où $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$.

Exemple 1:
Une urne contient 2 boules blanches, 3 boules rouges et 4 boules bleues. On extrait 3 boules de l'urne. On note X le nombre de boules blanches parmi ces 3 boules et Y le nombre de boules rouges.

Déterminer la loi du couple (X, Y). (On donne $\binom{9}{3} = 84$)

On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ *et* $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

• *On ne choisit que 3 boules dans l'urne donc le total des boules blanches et des boules rouges ne peut pas dépasser 3. Donc :*

$$P([X = 2] \cap [Y = 2]) = P([X = 2] \cap [Y = 3]) = P([X = 1] \cap [Y = 3]) = 0$$

• *Pour toutes les autres valeurs de* X *et* Y *le raisonnement est le même. Détaillons un exemple :*
Les tirages sont équiprobables. Il y a $\binom{9}{3}$ *façon de choisir 3 boules parmi 9.*

L'événement $[X = 1] \cap [Y = 1]$ *signifie que l'on a obtenu 1 boule blanche, 1 boule rouge et par conséquent 1 boule bleue. Le nombre de tirages correspondant à cette situation est :* $\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{4}{1} = 2 \times 3 \times 4 = 24$.

Donc $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \dfrac{24}{84} = \dfrac{2}{7}$.

De façon générale, si $i + j \leqslant 3$, *l'événement* $[X = i] \cap [Y = j]$ *signifie que l'on a tiré i boules blanches, j boules rouges et* $3 - i - j$ *boules bleus. Le nombre de façons d'obtenir une telle combinaison est* $\binom{2}{i}\binom{3}{j}\binom{4}{3-i-j}$ *parmi* $\binom{9}{3}$ *façons de tirer 3 boules de l'urne. On a donc* $P([X = i] \cap [Y = j]) = \dfrac{\binom{2}{i}\binom{3}{j}\binom{4}{3-i-j}}{\binom{9}{3}}$

On résume les résultats dans un tableau :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$	$\frac{18}{84}=\frac{3}{14}$	$\frac{12}{84}=\frac{1}{7}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{12}{84}=\frac{1}{7}$	$\frac{24}{84}=\frac{2}{7}$	$\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$	0
2	$\frac{4}{84}=\frac{1}{21}$	$\frac{3}{84}=\frac{1}{28}$	0	0

Exemple 2:

Dans une succession de pile ou face pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$ et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$, on note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

Déterminer la loi du couple (X, Y).

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $i \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.

- *Il est impossible que le deuxième pile arrive avant le premier donc si $i \geqslant j$ on a*

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = 0$$

- *Si $i < j$, on a $[X = i] \cap [Y = j] = F_1 \cap \cdots \cap F_{i-1} \cap P_i \cap F_{i+1} \cap \cdots \cap F_{j-1} \cap P_j$ et les lancers sont indépendants donc on a*

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = q^{i-1} \times p \times q^{j-i-1} \times p = q^{j-2}p^2$$

2 Lois marginales

Définition 3

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. La loi de X est appelé la **première loi marginale du couple** (X, Y) et la loi de Y est appelée la **deuxième loi marginale du couple** (X, Y).

Lorsque l'on connait la loi du couple (X, Y) on peut en déduire la loi de X et la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales :

Propriété 1

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. Alors on a :

$$\forall i \in I, \quad P([X = x_i]) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

$$\forall j \in J, \quad P([Y = y_i]) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Remarque :

Ce qu'il est important de retenir ici, c'est que lorsqu'on a la loi d'un couple pour obtenir la loi de X (ou celle de Y) il suffit de se servir de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = y_j])_{j \in J}$ (ou $([X = x_i])_{i \in I}$)

Exemple 3:
Reprenons l'exemple 2 et déterminons la loi deuxième loi marginale du couple $(X;Y)$ c'est-à-dire la loi de Y.

On rappelle tout d'abord que $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$.

Pour tout $j \in Y(\Omega)$, *d'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements* $([X=i])_{i\in X(\Omega)}$, *on a :*

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} P([X=i]\cap[Y=j]) + \sum_{i=j}^{+\infty} P([X=i]\cap[Y=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{j-1} p^2 \times q^{j-2} + \sum_{i=j}^{+\infty} 0 \\
&= p^2 \times q^{j-2} \sum_{i=1}^{j-1} 1 \\
&= (j-1)p^2 \times q^{j-2}
\end{aligned}$$

3 Lois conditionnelles

Définition 4
Soit (X,Y) un couple de VAR discrètes et soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y=y) \neq 0$.
On appelle **loi conditionnelle à** $[Y=y]$ **de** X l'ensemble des couples $(x_i, P_{[Y=y]}(X=x_i))$ pour $i \in I$.
On définit de même pour $x \in X(\Omega)$ la **loi conditionnelle à** $[X=x]$ **de** Y.

Exemple 4:
Reprenons l'exemple 1 et déterminons la loi conditionnelle à $[Y=2]$ de X.

- *On rappelle que* $X(\Omega) = \{0;1;2\}$.
- $P_{[Y=2]}(X=2) = 0$. *Car parmi les trois boules on ne peut pas avoir 2 boules blanches sachant que l'on a déjà 2 boules rouges.*
- $P_{[Y=2]}(X=1) = \dfrac{P([X=1]\cap[Y=2])}{P(Y=2)}$

Pour obtenir $P(Y=2)$ *on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements* $([X=0],[X=1],[X=2])$. *On a donc :*

$$P(Y=2) = P([X=0]\cap[Y=2]) + P([X=1]\cap[Y=2]) + P([X=2]\cap[Y=2]) = \frac{3}{14}$$

Ainsi $P_{[Y=2]}(X=1) = \dfrac{1}{14} \times \dfrac{14}{3} = \dfrac{1}{3}$

- $P_{[Y=2]}(X=0) = \dfrac{P([X=0]\cap[Y=2])}{P(Y=2)} = \dfrac{1}{7} \times \dfrac{14}{3} = \dfrac{2}{3}$

Remarque :
On aurait ici pu déterminer la loi conditionnelle à $[Y=2]$ de X directement sans se servir de la loi du couple.

Il est important de bien savoir jongler entre loi du couple, loi marginale et loi conditionnelle. Il s'agit uniquement d'appliquer la définition des probabilités conditionnelles ou alors d'appliquer la formule des probabilités totales mais voici tout de même une propriété générale qui reprend tout cela.

Propriété 2
Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes. Pour tout $(i, j) \in I \times J$ tels que $P(X = x_i) \neq 0$ et $P(Y = y_i) \neq 0$ on a :
• Loi conditionnelle à partir de la loi du couple :

$$P_{[X=x_i]}(Y = y_j) = \frac{P([X = x_i] \cap [Y = y_j])}{P(X = x_i)}$$
$$P_{[Y=y_j]}(X = x_i) = \frac{P([X = x_i] \cap [Y = y_j])}{P(Y = y_j)}$$

• Loi du couple à partir de la loi conditionnelle :

$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(X = x_i)P_{[X=x_i]}(Y = y_j)$$
$$P([X = x_i] \cap [Y = y_j]) = P(Y = y_j)P_{[Y=y_j]}(X = x_i)$$

• Lois marginales à partir de la loi du couple :

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$
$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

• Lois marginales à partir des lois conditionnelles :

$$P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(Y = y_j)P_{[Y=y_j]}(X = x_i)$$
$$P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i)P_{[X=x_i]}(Y = y_j)$$

II Indépendance de VAR discrètes

1 *Deux variables*

Définition 5
On dit que deux VAR discrètes X et Y sont **indépendantes** si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P(X = x)P(Y = y)$$

Exemple 5:
• Un urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire deux avec remise. Soit X et Y les variables aléatoires égales au premier et au second numéro tiré. On a pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$,

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{n^2} = P(X = i)P(Y = j)$$

donc les variables X et Y sont indépendantes.
• On effectue la même expérience mais sans remise. On a alors $P([X = i] \cap [Y = i]) = 0$ mais $P(X = i)P(Y = i) = \dfrac{1}{n^2}$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

Propriété 3
Si X et Y sont indépendantes on a aussi $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$

Propriété 4
Si X et Y sont deux VAR indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2 *n variables*

Définition 6
Soient $X_1, ..., X_n$ n VAR discrètes. On dit que les variables $X_1, ..., X_n$ sont **mutuellement indépendantes** (ou tout simplement **indépendantes**) lorsque
pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$:

$$P([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$$

Propriété 5
Soient $X_1, \cdots, X_n$ n VAR discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in \{2, ..., n-1\}$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

Exemple 6:
Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 VAR discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 + 2X_3^2$ et $X_2 - e^{X_5}$ sont indépendantes.

3 *Une suite de variables*

Définition 7
On dit que la suite de VAR discrète $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables aléatoires $X_0, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

III Fonction de deux VAR discrètes

Dans cette partie g désigne une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie au moins sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
On considère alors la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$

1 *Loi de probabilité de Z*

L'ensemble des valeurs prises par Z sont les $g(x_i, y_j)$ avec $(i, j) \in I \times J$. Mais il se peut que certaines des valeurs des $g(x_i, y_j)$ soient égales.
On note alors $Z(\Omega) = \{z_k / k \in K\}$.

Propriété 6
Soit $Z = g(X, Y)$. Alors on a :

$$P(Z = z_k) = \sum_{(i,j)/g(x_i,y_j)=z_k} P([X = x_i] \cap [Y = y_j])$$

Exemple 7:
Reprenons l'exemple 1 et déterminons les lois de $S = X + Y$ et $Z = XY$.
• *On a tout d'abord* $S(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Calculons par exemple

$$P(S = 3) = P([X = 0] \cap [Y = 3]) + P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{84} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{10}{84}$$

De même on peut obtenir le tableau :

valeur de S	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
probabilité	$\frac{1}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{42}$	*0*	*0*

• $Z(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 6\}$ *et*

valeur de Z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*6*
probabilité	$\frac{51}{84}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{28}$	*0*	*0*	*0*

2 Espérance

Si on a calculé la loi de $Z = g(X, Y)$ alors on peut calculer l'espérance de façon classique mais si on n'a pas déterminé clairement la loi de Z alors le théorème suivant peut aider...

Théorème 1
Théorème de Transfert

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P([X = x] \cap [Y = y])$$

Remarque :
Il faut donc connaitre la loi du couple (X, Y) pour utiliser ce théorème.

3 Produit de VAR discrètes

Propriété 7
• $E(XY) = \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP([X = x] \cap [Y = y])$
• Si X et Y sont indépendantes alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Attention la réciproque à la deuxième phrase est fausse.
Ce n'est pas parce que $E(XY) = E(X)E(Y)$ que les VAR sont indépendantes.

Démonstration : Hors programme

- Il suffit d'appliquer le théorème de transfert.
- Comme X et Y sont indépendantes :

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j P(X=x_i)P(Y=y_j) \\
&= \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_i y_j P(X=x_i)P(Y=y_j)\right) \\
&= \sum_{i\in I}\left(\left(\sum_{j\in J} y_j P(Y=y_j)\right) x_i P(X=x_i)\right) \\
&= \sum_{i\in I} E(Y) x_i P(X=x_i) \\
&= E(Y)E(X)
\end{aligned}$$

□

4 *Covariance et coefficient de corrélation linéaire*

Définition 8
Soient X et Y deux VAR discrètes admettant une espérance. On appelle **covariance de X et de Y** le nombre réel $\text{cov}(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$, s'il existe.

Théorème 2
Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors la covariance de X et de Y existe et on a

$$\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

C'est ce théorème que l'on utilisera le plus souvent pour calculer la covariance.

Remarque :
$\text{cov}(Y,X) = \text{cov}(X,Y)$ et on a aussi $\text{cov}(X,X) = V(X)$.

Corollaire 1
Si X et Y sont indépendantes alors $\text{cov}(X,Y) = 0$.

Attention ce n'est pas parce que $\text{cov}(X,Y) = 0$ que X et Y sont nécessairement indépendantes. Par contre si $\text{cov}(X,Y) \neq 0$, on peut affirmer que X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition 9
Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $\text{cov}(X,Y) = 0$, on dit que les variables sont **non corrélées**.

Remarque :
Deux VAR indépendantes sont non corrélées mais la réciproque est en générale fausse.

Exemple 8:

Reprenons l'exemple 1 et calculons la covariance de X et Y.

Grâce à l'exemple 3 on a

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{12} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y) = \frac{15}{28} + \frac{6}{14} + \frac{3}{84} = 1$$

Grâce à l'exemple 7 on a $E(XY) = 0 \times \frac{51}{84} + 1 \times \frac{2}{7} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{1}{2}$

Donc $cov(X,Y) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$.

Propriété 8

Soient X, X', Y et Y' quatre VAR discrètes admettant des moment d'ordre 2 et a, b deux réels. On a

$$\mathrm{cov}(aX + bX', Y) = a\mathrm{cov}(X,Y) + b\mathrm{cov}(X',Y)$$

$$\mathrm{cov}(X, aY + bY') = a\mathrm{cov}(X,Y) + b\mathrm{cov}(X,Y')$$

Il est important de penser à ce résultat pour simplifier les calculs de covariance qui peuvent parfois être pénibles.

Définition 10

Soient X et Y deux VAR discrètes d'écart type non nul. On appelle **coefficient de corrélation linéaire de X et Y** le réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Interprétation :

Ce nombre est un réel compris entre -1 et 1 qui compare les similarités entre les lois de X et de Y.

Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable et il est égal à -1 dans le cas où la fonction affine est décroissante.

Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables. Plus le coefficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte ; on emploie simplement l'expression « fortement corrélées » pour qualifier les deux variables.

Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes.

IV Somme de VAR discrètes

1 Linéarité de l'espérance

Théorème 3

Soit X et Y deux VAR discrètes et a, b deux réels. Alors

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Théorème 4

Soient $X_1, \cdots, X_n$ n VAR discrètes admettant toutes une espérance. Alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance et

$$E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

2 *Variance*

Théorème 5
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$
- Si X et Y sont indépendantes $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.

Théorème 6
- Soient $X_1, \cdots, X_n$ des VAR discrètes admettant toutes un moment d'ordre 2. Alors la variable $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(X_i, X_j)$$

- Si les $X_1, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes :

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

Il est très important de bien connaitre ces deux théorèmes.

3 *Somme de VAR indépendantes suivant une loi binomiale ou une loi de Poisson*

Théorème 7
- Si X et Y sont deux VAR **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n,p) et (m,p) alors $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m,p)$.
- Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k VAR **mutuellement indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs $(n_1,p), \cdots, (n_k,p)$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i, p \right)$.

Théorème 8
- Si X et Y sont deux VAR **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ alors $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
- Si $X_1, \cdots, X_k$ sont k VAR **mutuellement indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i$.

Démonstration :

Nous n'allons démonter que le premier point.
Soit $Z = X + Y$. On a tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2/i+j=k} P([X = i] \cap [Y = j]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P([X = i] \cap [Y = k - i]) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) \qquad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \frac{e^{-\mu}\mu^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \mu^{k-i}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i \mu^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc Z suit la loi de Poisson de paramètres $\lambda + \mu$.

$\square$