Exercices : Couples et suites de VAR discrètes

Exercice 1:

Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise de cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Z le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Z).
2. En déduire la loi de Z.

Exercice 2:

Soit un dé équilibré comprenant 1 face blanche et 5 faces rouges. On lance ce dé indéfiniment et on s'intéresse aux longueurs des séries successives de B ou R : par exemple si les lancers donnent les résultats $BBRRRRRRBBBRR\ldots$ alors la première série (BB) est de longueur 2 et la deuxième $(RRRRRR)$ est de longueur 6.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

1. Déterminer la loi de X_1. Montrer que X_1 admet une espérance et la calculer.
2. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
3. En déduire la loi de X_2.
4. En considérant $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 3:

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y)
2. Calculer $P(X = Y)$
3. Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 4:

Un individu joue avec une pièce truquée, pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0;1[$, de la façon suivante :

- Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.

- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile alors il relance n fois sa pièce. On appelle alors X le nombre de pile obtenu au cours de ces n lancers.

On admet que $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ et on pourra noter $q = 1 - p$.

1. Déterminer la loi de N.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la loi conditionnelle à $[N = n]$ de X.
3. En déduire la loi de X.
4. On considère B et G deux VAR indépendantes suivant respectivement une loi de Bernouilli $\mathcal{B}(1, p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.
   a) Déterminer la loi de la VAR BG.
   b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG.
   c) En déduire $E(X)$.

Exercice 5:

Soit X une VAR discrète dont la loi est donnée par :

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On considère la variable $Y = X^2$.

1. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).
2. X et Y sont-elle indépendantes ?
3. Calculer $\text{cov}(X, Y)$ et faire une remarque sur ce résultat.

Exercice 6:

Andy est un ivrogne : quand il n'a pas bu la veille, il s'enivre le jour même ; et s'il a bu la veille, il y a une chance sur trois pour qu'il reste sobre. On relève son état d'ivresse pendant 400 jours sachant qu'au jour 0 il était ivre. On note X le nombre de jours où il était sobre, et X_i la variable qui vaut 1 si Andy est sobre le i-ème jour et 0 sinon.

1. Exprimer X en fonction des X_i
2. Soit $p_i = P(X_i = 1)$. Montrer la relation $p_i = -\frac{1}{3}p_{i-1} + \frac{1}{3}$.
3. En déduire la loi des X_i puis calculer $E(X)$.

Exercice 7:

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant :
- 1 boule numéroté 1
- 2 boules numéroté 2
- ...
- n boules numérotés n.

1. On tire une boule de cette urne, on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.
   a) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
   b) En déduire la loi des variables T_1 et T_2.
   c) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
   d) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

Exercice 8:

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR de Bernoulli de paramètre p, indépendantes. Soit $Y_i = X_i X_{i+1}$

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

Exercice 9:

Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

1. L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P([S=0]\cap[U=0]) = 0,4$$
$$P([S=0]\cap[U=1]) = 0,3$$
$$P([S=1]\cap[U=0]) = 0,2$$
$$P([S=1]\cap[U=1]) = 0,1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

   a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = \dfrac{3}{5}$.

   b) Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?

   c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

2. On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.
Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geqslant 2$).
On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :
-C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
-L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon.

   a) Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.

   b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(L_1 = k) = 1$$

   c) Déterminer la loi de L_2.

Exercice 10:

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.

On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par : $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?
2. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.

3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
4. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
5. Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.
6. Soit $p \leqslant n-1$.
   a) Déterminer $P_{[Z_p=k]}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
   $$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$
   c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
   (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Exercice 11:

Soit (X, Y) un couple de VAR discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$P([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$$

1. Déterminer toutes les valeurs possibles de a.
2. Déterminer les lois marginales.
3. X et Y sont-elle indépendantes ?

Correction

Exercice 1:

1. On a ici $X(\Omega) = [\![1; n-1]\!]$ et $Z(\Omega) = [\![2; n]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$ et $j \in Z(\Omega)$.
   • Si $k \geqslant j$ alors $P([X = k] \cap [Z = j]) = 0$.
   • Si $k < j$ alors on peut écrire $[X = k] \cap [Z = j] = R_1 \cap \cdots R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{j-1} \cap B_j$ et donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Z = j]) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} \\ &\quad \times \frac{n-2-(k-1)}{n-k} \times \cdots \times \frac{n-2-(j-3)}{n-(j-2)} \times \frac{1}{n-(j-1)} \\ &= \frac{(n-2)(n-3)\cdots(n-k) \times 2 \times (n-k-1)\cdots(n-j+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $([X = k])_{k \in X(\Omega)}$, on a pour tout $j \in Z(\Omega)$:

$$\begin{aligned} P(Z = j) &= \sum_{k=1}^{n-1} P([X = k] \cap [Z = j]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} P([X = k] \cap [Z = j] + \sum_{k=j}^{n-1} P([X = k] \cap [Z = j]) \\ &= \sum_{k=1}^{j-1} \frac{2}{n(n-1)} + \sum_{k=j}^{n-1} 0 = \frac{2(j-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Exercice 2:

1. On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car on lance le dé indéfiniment donc la première série peut être de n'importe quelle longueur non nulle.
   De plus soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a $[X_1 = k] = (B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap R_{k+1}) \cup (R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1})$ donc comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants, on a

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^k \times \frac{1}{6}$$

   Si la série $\sum kP(X_1 = k)$ est absolument convergente, X_1 admettra une espérance. En cas de convergence on aura :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

   On voit ici deux séries dérivées premières de série géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et $\frac{5}{6}$ donc ce sont deux séries convergentes.

Ainsi X_1 admet une espérance et

$$E(X_1) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\frac{1}{(1-1/6)^2} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}\frac{1}{(1-5/6)^2} = \frac{26}{5}$$

2. On a $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in X_1(\Omega)$ et $j \in X_2(\Omega)$. On peut écrire :

$$\begin{aligned}[X_1 = k] \cap [X_2 = j] = &(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \cdots \cap R_{k+j} \cap B_{k+j+1}) \\ &\cup (R_1 \cap \cdots \cap R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots \cap B_{k+j} \cap R_{k+j+1})\end{aligned}$$

donc comme on a une union d'événements incompatibles et que les lancers sont indépendants :

$$P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) = \frac{1}{6^k} \times \frac{5^j}{6^j} \times \frac{1}{6} + \frac{5^k}{6^k} \times \frac{1}{6^j} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{5}{6}\right)^j + \left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{6}\right)^j$$

3. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_1 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ on a :

$$\begin{aligned}P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X_1 = k] \cap [X_2 = j]) \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \times \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^k + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^j \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^j \times \frac{1}{6} \times \frac{1/6}{1-1/6} + \frac{5}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^j \times \frac{5/6}{1-5/6} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{j-1} \times \frac{1}{36} + \frac{25}{36} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{j-1}\end{aligned}$$

4. On a $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{30}{6^3} = \frac{5}{36}$ et $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) = \frac{5}{18} \times \frac{13}{18} = \frac{65}{324}$.
On a donc $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \neq P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1)$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 3: Difficile

1. On a $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$ et $j \in Y(\Omega)$.
   - Si $j > k$ alors $P([X = k] \cap [Y = j]) = 0$ car il est impossible de tirer une boule numérotée j dans l'urne k lorsque $j > k$.
   - Si $j \leqslant k$ alors $P([X = k] \cap [Y = j]) = P(X = k)P_{[X=k]}(Y = j) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} = \frac{1}{nk}$.
2. $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{n} P([X = k] \cap [Y = k]) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nk} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.
3. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = k])_{k\in[\![1;n]\!]}$ on a :

$$P(Y = j) = \sum_{k=1}^{n} P([X = k] \cap [Y = j]) = \sum_{k=j}^{n}\frac{1}{nk} = \frac{1}{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{k}$$

Y est une VAR discrète finie donc elle admet une espérance et on a :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{j=1}^{n} jP(Y = j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{j}{kn} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{kn} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn} \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(k+1) = \frac{1}{2n} \times \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1\right) = \frac{n+3}{4}\end{aligned}$$

Exercice 4:

1. La variable aléatoire N correspond au rang d'apparition pour la première fois de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours d'une succession d'épreuves identiques. N suit donc la loi géométrique de paramètre p :

$$N(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(N = n) = (1-p)^{n-1}p$$

2. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et on chercher à calculer pour tout entier k $P_{[N=n]}(X = k)$.
Lorsqu'on sait que $[N = n]$ cela signifie que X compte le nombre de réalisation de l'événement « obtenir pile » , qui est de probabilité p, au cours de n réalisations identiques d'une épreuve. La loi conditionnelle de X à $[N = n]$ est donc la loi binomiale de paramètres n et p :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P_{[N=n]}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$ on a pour tout entier $k > 0$:

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N = n)P_{[N=n]}(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-1}p\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = p^{k+1}q^{-k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}(q^2)^n$$
$$= \frac{p^{k+1}}{q^{k+1}} \times \frac{q^{2k}}{(1-q^2)^{k+1}} = \frac{p^{k+1}q^{k-1}}{(1-q)^{k+1}(1+q)^{k+1}} = \frac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$$

et $P(X = 0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}q^n = \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}(q^2)^n = \frac{pq^2}{q(1-q^2)} = \frac{q}{1+q}$

4. a) On a $BG(\Omega) = \mathbb{N}$.
   - $P(BG = 0) = P(B = 0) = 1 - p'$
   - Soit $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(BG = k) = P([B = 1] \cap [G = k]) = P(B = 1)P(G = k) = p' \times (1-p')^{k-1}p' = p'^2(1-p')^{k-1}$$

   b) On choisit $p' = 1 - \dfrac{q}{q+1} = \dfrac{1}{1+q}$. On a bien alors $P(X = 0) = P(BG = 0)$ et de plus $p'^2(1-p')^{k-1} = \dfrac{1}{(1+q)^2} \times \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k-1}} = \dfrac{q^{k-1}}{(1+q)^{k+1}}$ donc $P(X = k) = P(BG = k)$.

   c) Comme X et BG ont la même loi, elles ont la même espérance. On a donc $E(X) = E(BG)$. Or B et G sont indépendantes donc

$$E(BG) = E(B)E(G) = p' \times \frac{1}{p'} = 1$$

   et donc $E(X) = 1$.

Exercice 5:

1.

y_i	0	1	4
$P(Y=y_i)$	1/6	1/2	1/3

X \ Y	0	1	4
-2	0	0	1/6
-1	0	1/4	0
0	1/6	0	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

2. $P([X=1]\cap[Y=0])=0$ et $P(X=1)P(Y=0)\neq 0$ donc les variables ne sont pas indépendantes.
3. $E(X)=0$, $E(Y)=\dfrac{11}{6}$ et $E(XY)=\sum xyP([X=x]\cap[Y=y])=0$ donc $\text{cov}(X,Y)=0$.

   Les VAR ne sont pas indépendantes et pourtant elles ont une covariance nulle.

Exercice 6:

1. $X=\sum_{i=1}^{400}X_i$ car si on ajoute 1 à chaque fois que Andy et sobre et 0 s'il est ivre on obtiendra bien le nombre de jours où il a été sobre.
2. Avec le système complet d'événement $([X_{i-1}=0],[X_{i-1}=1])$, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_i=1)=P(X_{i-1}=0)P_{[X_{i-1}=0]}(X_i=1)+P(X_{i-1}=1)P_{[X_{i-1}=1]}(X_i=1)$$

   Or d'après l'énoncé $P_{[X_{i-1}=0]}(X_i=1)=\dfrac{1}{3}$ et $P_{[X_{i-1}=1]}(X_i=1)=0$ et de plus $P(X_{i-1}=0)=1-p_{i-1}$. On a donc

$$p_i=-\frac{1}{3}p_{i-1}+\frac{1}{3}$$

3. On sait que $p_0=0$ et (p_i) est une suite arithmético-géométrique. On pose $q_i=p_i+k$ où k est un réel à choisir. On a alors $q_i=-\dfrac{1}{3}p_{i-1}+\dfrac{1}{3}+k=-\dfrac{1}{3}(q_{i-1}-k)+\dfrac{1}{3}+k=-\dfrac{1}{3}q_{i-1}+\dfrac{4}{3}k+\dfrac{1}{3}$. On choisit alors $k=-\dfrac{1}{4}$ et on a $q_i=-\dfrac{1}{3}q_{i-1}$ et $q_0=-\dfrac{1}{4}$ donc $q_i=-\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^i$ et on en déduit donc que

$$p_i=\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^i\right)$$

   En conclusion on a $X_i(\Omega)=\{0;1\}$ et $P(X_i=1)=\dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^i\right)$ et $P(X_i=0)=\dfrac{1}{4}\left(3+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^i\right)$

   On en déduit que $E(X_i)=\dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^i\right)$ et donc

$$\begin{aligned}E(X)=\sum_{i=1}^{400}E(X_i)=\sum_{i=1}^{400}\frac{1}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^i\right)&=\frac{1}{4}\left(400+\frac{1}{3}\frac{1-(-1/3)^{400}}{1+1/3}\right)\\&=100+\frac{1}{16}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{400}\right)\approx 100\end{aligned}$$

Exercice 7:

1. On a $X(\Omega) = [\![1;n]\!]$ et comme il y a $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ boules dans l'urne en tout, pour tout $k \in X(\Omega)$ on a $P(X=k) = \dfrac{k}{n(n+1)/2} = \dfrac{2k}{n(n+1)}$.
   X est une VAR discrète finie donc elle admet un espérance et
   $$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3}$$

2. a) On a $T_1(\Omega) = T_2(\Omega) = [\![1;n]\!]$. Soit k et j deux éléments de $[\![1;n]\!]$.
   - Si $k \neq j$, on a
   $$\begin{aligned} P([T_1=k]\cap[T_2=j]) &= P(T_1=k)P_{[T_1=k]}(T_2=j) = \frac{2k}{n(n+1)} \times \frac{j}{n(n+1)/2-1} \\ &= \frac{4kj}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$
   - Si $k=j$, on a
   $$\begin{aligned} P([T_1=k]\cap[T_2=k]) &= P(T_1=k)P_{[T_1=k]}(T_2=k) = \frac{2k}{n(n+1)} \times \frac{k-1}{n(n+1)/2-1} \\ &= \frac{4k(k-1)}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \end{aligned}$$

   b) T_1 suit la même loi que X.
   Soit $j \in T_2(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([T_1=k])_{k\in[\![1;n]\!]}$ on a
   $$\begin{aligned} P(T_2=j) &= \sum_{k=1}^{n} P([T_1=k]\cap[T_2=j]) \\ &= \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{4kj}{n(n+1)(n-1)(n+2)} + \frac{4j(j-1)}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \\ &= \frac{4j}{n(n+1)(n-1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)}{2} - j\right) + \frac{4j(j-1)}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \\ &= \frac{4j}{n(n+1)(n-1)(n+2)}\left(\frac{n(n+1)}{2} - j + j - 1\right) \\ &= \frac{2j}{n(n+1)} \end{aligned}$$

   c) On a $P([T_1=1]\cap[T_2=1]) = 0$ et $P(T_1=1)\times P(T_2=1) = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$ donc les variables T_1 et T_2 ne sont pas indépendantes.

   d) $E(T_1+T_2) = E(T_1)+E(T_2) = 2E(X) = \dfrac{2(2n+1)}{3}$

Exercice 8:

1. On a $Y_i(\Omega) = \{0;1\}$ et $P(Y_i=1) = P([X_i=1]\cap[X_{i+1}=1]) = p\times p = p^2$ car les variables X_i sont indépendantes. Donc on a $P(Y_i=0) = 1-p^2$.
   Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p^2.

2. D'après la linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = np^2$.

On sait aussi que $V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{cov}(Y_i, Y_j)$.
Or $E(Y_iY_j) = P(Y_iY_j = 1) = P([X_i = 1] \cap [X_{i+1} = 1] \cap [X_j = 1] \cap [X_{j+1} = 1])$.
Si $j \neq i+1$ alors $E(Y_iY_j) = p^4$ et si $j = i+1$, $E(Y_iY_j) = p^3$.
Donc si $j \neq i+1$ alors $\text{cov}(Y_i, Y_j) = 0$ et si $j = i+1$, $\text{cov}(Y_i, Y_{i+1}) = p^3(1-p)$.
On a donc $V(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)(n + 3np - 2p)$.

Exercice 9: ECRICOME 2007

1. a) Par définition de S, on sait que $S(\Omega) = \{0; 1\}$ et $U(\Omega) = \{0; 1\}$. Donc les événements $[U = 0]$ et $[U = 1]$ forment un système complet d'événements et donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(S = 0) = P([S = 0] \cap [U = 0]) + P([S = 0] \cap [U = 1]) = 0,7$$
$$P(S = 1) = P([S = 1] \cap [U = 0]) + P([S = 1] \cap [U = 1]) = 0,3$$

De même avec le système complet d'événements $[S = 0]$ et $[S = 1]$, on obtient

$$P(U = 0) = 0,6 \quad \text{et} \quad P(U = 1) = 0,4$$

Donc S suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,3$ et U suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,4$.
La probabilité que le client règle par carte bancaire est le probabilité de l'événement $[U = 0]$ c'est à dire $0,6 = \frac{3}{5}$.

b) Par définition $\text{cov}(S, U) = E(SU) - E(S)E(U)$. De plus on a $E(S) = 0,3$, $E(U) = 0,4$ et $E(SU) = 1 \times 1 \times P([S = 1] \cap [U = 1]) = 0,1$. Donc $\text{cov}(S, U) = 0,1 - 0,12 = -0,02$.
Comme la covariance n'est pas nulle on peut affirmer que les variables S et U ne sont pas indépendantes.

c) On cherche dans cette question à calculer $P_{[U=1]}(S = 1)$. On a donc :

$$P_{[U=1]}(S = 1) = \frac{P([S = 1] \cap [U = 1])}{P(U = 1)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}$$

2. a) C_n compte le nombre de réalisations de l'événements « le client paye par carte bancaire », qui est de probabilité $\frac{3}{5}$, pour n clients se présentant à la caisse, chaque clients étant indépendants des autres. Donc C_n suit une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{3}{5}\right)$. On a donc

$$E(C_n) = \frac{3n}{5} \quad \text{et} \quad V(C_n) = \frac{6n}{25}$$

b) Par définition de L_1, on a $L_1(\Omega) = [\![0; n]\!]$. De plus $P(L_1 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ car l'événement $[L_1 = 0]$ signifie qu'aucun de client n'a payé par carte bancaire.
Pour tout entier k compris entre 1 et n, l'événement $[L_1 = k]$ signifie que les $k-1$ premiers client n'ont pas payé par carte bancaire mais que le k-ième client a payé par carte bancaire. On a donc

$$P(L_1 = k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \frac{3}{5}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P(L_1=k) &= \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}\\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{5}\times\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}\\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n = 1\end{aligned}$$

c) Par définition de L_2, on a $L_2(\Omega) = \{0, 2, 3, \cdots, n\}$.
L'événement $[L_2 = 0]$ signifie qu'aucun client n'a payé en carte bancaire ou alors qu'un seul client à payé en carte bancaire, donc $[L_2 = 0] = [C_n = 0] \cup [C_n = 1]$. Ces événements étant incompatibles :

$$P(L_2 = 0) = \left(\frac{2}{5}\right)^n + n\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

Soit k un entier compris entre 2 et n. L'événement $[L_2 = k]$ signifie que parmi les $k-1$ premiers clients, un seul a payé en carte bancaire, et le k-ième client a payé en carte bancaire.
Donc $[L_2 = k] = [C_{k-1} = 1] \cap [U_k = 0]$ où U_k prend la valeur 0 si le k-ième client paye par carte bancaire et 1 sinon. On a donc, par indépendance des événements :

$$P(L_2 = k) = (k-1)\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2} \times \frac{3}{5} = (k-1)\left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

On a donc bien obtenu la loi de L_2.

Exercice 10: ECRICOME 2002

1. Z_p compte le nombre de boules blanches tirées au cours des p premiers tirages.
2. X_1 vaut 1 lorsque la boule tirées est blanche et 0 sinon. Donc X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Donc on a $E(X_1) = \frac{1}{2}$
3. • Pour déterminer la loi d'un couple il faut calculer les différents $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$. On peut présenter les résultats sous forme d'un tableau :

X_1 \ X_2	0	1
0	$\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}$	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}$
1	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{c+2}$	$\frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}$

Pour calculer par exemple $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$ on a utilisé la formule des probabilités composées $P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0)$ et on a remarqué que, sachant que l'on a obtenu une boule noire au premier tirage ($[X_1 = 0]$), il y a avant le deuxième tirage $c+2$ boules dans l'urne dont $c+1$ qui sont noires donc $P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{c+1}{c+2}$.
On a raisonné de même pour les autres probabilités.
• D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements
$([X_1 = 0], [X_1 = 1])$ on a

$$P(X_2 = 1) = P([X_1 = 0] \cap [X-2 = 1]) + P([X_1 = 1] \cap [X-2 = 1]) = \frac{c+1}{2(c+2)} + \frac{1}{2(c+2)} = \frac{1}{2}$$

Et donc X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et ainsi $E(X_2) = \frac{1}{2}$.

4. $Z_2 = X_1 + X_2$. Donc $Z(\Omega) = \{0;1;2\}$. On a :
   - $P(Z_2=0) = P([X_1=0]\cap[X_2=0]) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{c+1}{c+2}$.
   - $P(Z_2=1) = P([X_1=0]\cap[X_2=1]) + P([X_1=1]\cap[X_2=0]) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{c+2} + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{c+2} = \dfrac{1}{c+2}$.
   - $P(Z_2=2) = P([X_1=1]\cap[X_2=1]) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{c+1}{c+2}$.

k	0	1	2
$P(Z_2=k)$	$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{c+1}{c+2}$	$\dfrac{1}{c+2}$	$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{c+1}{c+2}$

5. On ajoute p chiffres qui valent chacun 0 ou 1 donc $Z_p(\Omega) = [\![0;p]\!]$
6. a) L'événement $[Z_p = k]$ signifie qu'au cours des p premiers tirages, on a tiré k boules blanches et donc $p-k$ boules noires. On a donc mis dans l'urne kc boules blanches et $(p-k)c$ boules noires supplémentaires. Il y a donc avant le tirage $p+1$, $pc+2$ boules dans l'urne dont $kc+1$ blanches :
$$P_{[Z_p=k]}(X_{p+1}=1) = \frac{kc+1}{pc+2}$$
   b) A l'aide de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $[Z_p=0], \cdots, [Z_p=p]$ on a :
$$\begin{aligned} P(X_{p+1}=1) &= \sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)P_{[Z_p=k]}(X_{p+1}=1) \\ &= \sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)\frac{kc+1}{pc+2} \\ &= \frac{1}{pc+2}\left(c\sum_{k=0}^{p} kP(Z_p=k) + \sum_{k=0}^{p} P(Z_p=k)\right) \\ &= \frac{cE(Z_p)+1}{pc+2} \end{aligned}$$
   c) Montrons par récurrence que la propriété « $\mathcal{P}(p)$: $X_1, ..., X_p$ suivent des lois de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ » est vraie pour tout $p \in \{1, \cdots, n\}$.
   - Pour $p=1$ la propriété est vraie d'après la question 2.
   - Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Alors $E(Z_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2} = \frac{p}{2}$

   On obtient donc $P(X_{p+1}=1) = \dfrac{pc/2+1}{pc+2} = \dfrac{1}{2}$ et donc X_{p+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. $\mathcal{P}(p+1)$ est donc vraie.

   Ainsi pour tout $p \in \{1, \cdots, n\}$, X_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 11:

1. Il faut choisir a pour que $\sum_{i,j} P([X=i]\cap[Y=j]) = 1$.

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} P([X=i]\cap[Y=j]) &= \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a}{2^{i+1}j!}\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{2j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\frac{a}{2j!}\times 2\right)\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a}{j!} = a\times e^1\end{aligned}$$

   Donc il faut prendre $a = e^{-1}$.

2. • $\forall i \in \mathbb{N}$, $P(X=i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$
   • $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{e^{-1}}{j!}$
3. On a $P([X=i]\cap[Y=j]) = P(X=i)P(Y=j)$ donc les variables sont indépendantes.