Variables aléatoires à densité

Rappels :

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ où $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un espace probabilisé. Lorsque $X(\Omega)$ est un ensemble discret on dit que X est une VAR discrète.

Pour **toutes** les VAR (discrètes ou non) on définit la fonction de répartition de X, que l'on note F_X, par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$ pour tout réel x.

I Notion de variable aléatoire à densité

1 Densité

Définition 1

Soit X une VAR définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et F_X sa fonction de répartition. On dit que X est **une variable aléatoire réelle à densité** s'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f_X est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f_X est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt = 1$

(iv) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

La fonction f_X s'appelle alors **une densité** de la variable aléatoire X.

Remarque :

La fonction f_X n'est pas unique c'est pourquoi on dit que c'est **une** densité de X. En effet si g est une fonction égale à f_X sauf en un nombre fini de points alors g est aussi une densité de X.

Nous admettrons le théorème suivant, qui nous permet de vérifier si une fonction f donnée est une densité d'une variable X.

Théorème 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

(i) f est à valeur réelles positives ou nulles

(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire réelle X définie sur cet espace, tels que f est une densité de la variable X.
On dit alors que f est une **densité de probabilité**.

Exemple 1:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Montrons que c'est une densité de probabilité.

Nous allons ici appliquer le théorème 1 donc il nous faut vérifier les 3 hypothèses de ce théorème :

(i) Comme l'exponentielle est positive, f est bien une fonction à valeurs positives ou nulles.

(ii) • *Sur* $]-\infty; 0[$ *f est la fonction nulle donc f est continue sur* $]-\infty; 0[$.

• *Sur* $[0; +\infty[$, *f est la composée des fonctions $x \to -x$ et $t \to e^t$ qui sont continues sur $\mathbb{R}$, donc f est continue sur* $[0; +\infty[$.

- *Ainsi on a montré que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.*

(On pourrait essayer de voir si f est continue en 0 mais ce n'est pas nécessaire pour utiliser le théorème 1 donc nous n'allons pas faire de travail inutile...)

(iii) Il nous faut maintenant vérifier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ et calculer la valeur de cette intégrale.

- *f est nulle sur $]-\infty;0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ est convergente et vaut 0.*
- *Montrons la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$.*

La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ donc le problème se pose uniquement en $+\infty$.

Soit $A > 0$, $\displaystyle\int_0^A f(x)\,dx = \int_0^A e^{-x}\ ,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^A = 1 - e^{-A}$.

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,dx = 1$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

- *En conclusion l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et vaut $0+1=1$.*

f est donc bien une densité de probabilité.

2 Caractérisation par la fonction de répartition

Théorème 2

Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et si f est une densité de X alors :
- F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et lorsque F est dérivable en x, $F'(x) = f(x)$.

Remarques :
- Les variables discrètes ne sont donc pas des variables à densité.
- Comme f est positive, la fonction de répartition est bien croissante.
- La fonction de répartition est une primitive de la densité.

Ces propriétés sur la fonction de répartition suffisent à caractériser les variables à densité :

Théorème 3

Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Si :

(i) F est continue sur $\mathbb{R}$

(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points

alors X est une variable aléatoire à densité.
De plus si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x) = f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

En pratique :

Pour démontrer qu'une variable X donnée est une variable à densité, il faut trouver sa fonction de répartition et vérifier qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf peut être en un nombre fini de points. Pour trouver la densité de X il suffit de prendre la dérivée de F.

Exemple 2:
Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<2\\ 1-\dfrac{8}{x^3} & \text{si } x\geqslant 2\end{cases}$$

Montrer que X est une variable à densité et en déterminer une densité.
On va utiliser le théorème 3 donc nous avons deux choses à vérifier sur F.

(i) Sur $]-\infty;2[$, F est une fonction constante donc continue. Sur $]2;+\infty[$ la fonction $x\to\dfrac{8}{x^3}$ est continue donc F est continue sur cet intervalle.
De plus $\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=1-\dfrac{8}{8}=0=F(2)$.
Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Sur $]-\infty;2[$, F est une fonction constante donc $\mathcal{C}^1$. Sur $]2;+\infty[$ la fonction $x\to\dfrac{8}{x^3}$ est $\mathcal{C}^1$ donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $]2;+\infty[$.
Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et pour $x\neq 2$:

$$F'(x)=\begin{cases}0 & \textit{si } x<2\\ \dfrac{24}{x^4} & \textit{si } x>2\end{cases}$$

X est donc bien une variable à densité et une densité de X est par exemple $f(x)=\begin{cases}0 & \textit{si } x<2\\ \dfrac{24}{x^4} & \textit{si } x\geqslant 2\end{cases}$

Le théorème suivant permet de déterminer si une fonction F donnée est la fonction de répartition d'une variable à densité X.

Théorème 4
Soit F une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si

(i) F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$
(ii) F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points
(iii) F est croissante sur $\mathbb{R}$.
(iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$

alors il existe un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et une variable aléatoire X définie sur cet espace, tels que F est la fonction de répartition de X.
De plus X est alors une variable à densité et si f est une fonction positive ou nulle telle que $F'(x)=f(x)$ en tout point x où F est dérivable, alors f est une densité de X.

Exemple 3:
On considère la fonction F définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2} & \text{si } -1\leqslant x<0\\ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1 & \text{si } x>1\end{cases}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité et en déterminer une densité.

• *Sur* $]-\infty;-1[$ *et sur* $]1;+\infty[$, F *est une fonction constante donc continue. Sur* $]-1;0[$ *et sur* $]0;1[$, F *est continue comme composée de fonctions usuelles continues. La continuité ne pose problème qu'en -1, 0 et 1. Or :*

$$\lim_{-1^-} F = \lim_{-1^+} F = 0 = F(-1)$$
$$\lim_{0^-} F = \lim_{0^+} F = \frac{1}{2} = F(0)$$
$$\lim_{1^-} F = \lim_{1^+} F = 1 = F(1)$$

Donc F *est continue sur* $\mathbb{R}$.

• *A l'aide des fonctions usuelles on voit que* F *est* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$ *et sur cet ensemble :*

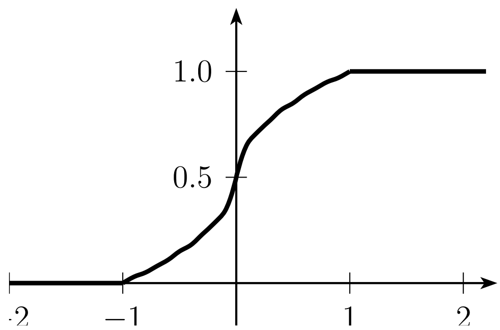
$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{-x}} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

• *Aux points où* F *est dérivable, on voit que* $F'(x) \geqslant 0$ *et comme* F *est continue,* F *est bien croissante sur* $\mathbb{R}$.

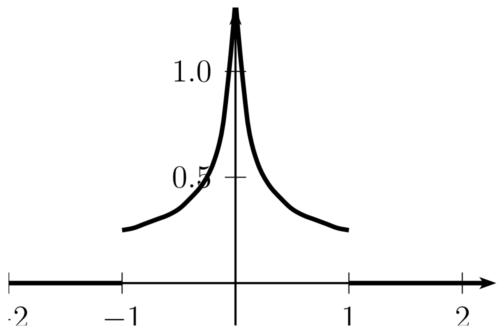
• *Enfin* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

On peut donc dire que F *est la fonction de répartition d'une variable aléatoire* X *à densité. Une densité de* X *est par exemple :*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{|x|}} & \text{si } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Représentation graphique de F



Représentation graphique de f

3 Quelques propriétés

Propriété 1

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f.

(i) Pour tout x réel :

$$P(X < x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$
$$P(X > x) = P(X \geqslant x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\,dt$$

(ii) Pour tout a et b réels tels que $a \leqslant b$:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

(iii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

Corollaire 1
Soit X une variable à densité et f une densité de X. Si f est nulle en dehors d'un intervalle $[a;b]$, alors on a $P(X<a)=0$ et $P(X>b)=0$. On dit alors que X prend ses valeurs dans l'intervalle $[a;b]$.

Remarques :

- La probabilité de l'événement $[a \leqslant X \leqslant b]$ apparait comme l'aire de la partie du plan située en dessous de la courbe représentative de f, au dessus de l'axe des abscisse et entre les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.
- On voit que contrairement aux variables discrètes, on a ici pour tout x, $P(X=x)=0$. Ainsi ce n'est pas la donnée de $P(X=x)$ qui est la loi de X mais plutôt la donnée de la fonction de répartition ou de la densité.

4 *Indépendance*

Définition 2
Des VAR à densité $X_1, \cdots, X_n$ sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites **indépendantes** si pour tous réels $(x_1, \cdots, x_n)$:

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k \leqslant x_k]\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leqslant x_k)$$

Remarque :
Pour montrer que deux variables à densité X et Y sont indépendantes il faut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on a $P([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]) = P(X \leqslant x) \times P(Y \leqslant y)$.

II Moments d'une variable aléatoire à densité

1 *Espérance*

a Définition

Définition 3
Soit X une VAR de densité f. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est absolument convergente alors on dit que X **admet une espérance** que l'on note $E(X)$ et on a :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$$

Exemple 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

•

(i) Comme $x(1-x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;1]$, f est bien une fonction positive.
(ii) De plus on vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$.
(iii) Enfin on voit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ sont convergentes car f est nulle sur $]-\infty;0]$ et sur $[1;+\infty[$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ est convergente car f est continue sur $[0;1]$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente et :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 6x(1-x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \int_{0}^{1} (6x - 6x^2)\,dx = [3x^2 - 2x^3]_0^1 = 1$$

Donc f *est bien une densité de probabilité.*

• *La fonction* $x \to |xf(x)|$ *est nulle sur* $]-\infty;0]$ *et sur* $[1;+\infty[$ *donc* $\int_{-\infty}^{0} |xf(x)|\,dx$ *et* $\int_{1}^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ *sont convergente. De plus* $x \to |xf(x)|$ *est continue sur* $[0;1]$ *donc* $\int_{0}^{1} |xf(x)|\,dx$ *est aussi convergente.*

Par conséquent $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ *est absolument convergente et* X *admet donc une espérance. De plus :*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 6x^2(1-x)\,dx + \int_{1}^{+\infty} 0\,dx = \int_{0}^{1} (6x^2 - 6x^3)\,dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

<u>Exemple 5:</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

•

(i) f *est bien une fonction à valeurs positive*

(ii) De plus f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

(iii) On voit que $\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx$ *est convergente car* f *est nulle sur* $]-\infty;1[$.

Sur $[1;+\infty[$, $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge car c'est une intégrale de Riemann avec* $\alpha = 2 > 1$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *est convergente et :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{1}^{A} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A = \lim_{A\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$$

f *est donc bien une densité de probabilité.*

• *- Sur* $]-\infty;1[$, $|xf(x)| = 0$ *donc* $\int_{-\infty}^{1} |xf(x)|\,dx$ *converge.*

- Sur $[1;+\infty[$, $|xf(x)| = \dfrac{1}{x}$ *et donc* $\int_{1}^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ *diverge.*

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ *n'est pas absolument convergente et donc* X *n'admet donc pas d'espérance.*

Définition 4

Si X est une VAR telle que $E(X) = 0$ on dit que X **est une variable centrée**.

b Linéarité

Propriété 2
Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors pour tout réels a et b, $aX+b$ admet une espérance et $E(aX+b)=aE(X)+b$.

Théorème 5
Soient X et Y deux VAR à densité admettant une espérance. Si $X+Y$ est une VAR à densité alors elle admet une espérance et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$.

c Moment d'ordre r

Définition 5
Soit $r\in\mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$ est absolument convergente alors on dit que X **admet un moment d'ordre** r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\,dx$$

Remarque :
Le moment d'ordre 1 de X est tout simplement l'espérance de X.

2 *Variance et écart-type*

Définition 6
Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X-E(X))^2$ admet une espérance, on appelle **variance de** X le réel

$$V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)$$

Pour le calcul de variance dans la pratique on utilisera tout comme pour les variables discrètes plutôt le théorème suivant :

Théorème 6
Soit X une VAR à densité. X admet une variance ssi X admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

Exemple 6:
Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x)=6x(1-x)$ si $x\in[0;1]$ et $f(x)=0$ sinon. Nous avons vu que $E(X)=\dfrac{1}{2}$.

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer

Il nous reste ici à vérifier que X admet un moment d'ordre 2 et à le calculer.

- *Sur* $]-\infty;0]$ *et sur* $[1;+\infty[$, $|x^2f(x)|=0$ *donc* $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}|x^2f(x)|\,dx$ *et* $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}|x^2f(x)|\,dx$ *sont convergentes.*
- *Sur* $[0;1]$ $x\to|x^2f(x)|$ *est continue donc* $\displaystyle\int_0^1|x^2f(x)|\,dx$ *est convergente.*

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,dx$ *est absolument convergente ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.*

De plus :

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)\,dx = \left[\frac{3}{2}x^4 - \frac{6}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{3}{10}$$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{20}$.

Exemple 7:

Soit X une VAR dont une densité f est définie par $f(x) = 0$ si $x < 1$ et $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ si $x \geqslant 1$.
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer. Même question pour la variance.

- *Sur* $]-\infty;1[$, $|xf(x)| = 0$ *donc* $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} |xf(x)|\,dx$ *converge.*

Sur $[1;+\infty[$, $|xf(x)| = \dfrac{2}{x^2}$ *et donc* $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} |xf(x)|\,dx$ *converge, car* $2 > 1$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ *est absolument convergente ce qui signifie que* X *admet une espérance qui vaut* $E(X) = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{2}{x^2}\,dx = 2$. *(On a déjà calculé dans l'exemple 5* $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ *)*

- *Sur* $]-\infty;1[$, $|x^2f(x)| = 0$ *donc* $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} |x^2f(x)|\,dx$ *converge.*

Sur $[1;+\infty[$, $|x^2f(x)| = \dfrac{2}{x}$ *et donc* $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} |x^2f(x)|\,dx$ *diverge.*

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\,dx$ *ne converge pas absolument et ainsi* X *n'admet pas de moment d'ordre 2 et donc n'admet pas de variance.*

Définition 7
Si X admet une variance alors $V(X) \geqslant 0$. On appelle alors **écart-type** le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Propriété 3
Soit X une variable à densité admettant une variance. Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et $V(aX+b) = a^2V(X)$

Définition 8
Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X **est une variable réduite**.

Définition 9
Si X admet une espérance et un écart-type non nul, la variable $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée **la variable centrée réduite associée à** X.

III Lois usuelles

1 *Loi uniforme*

Il s'agit ici de la loi la plus simple pour les variables aléatoires à densité. Elle correspond au fait de choisir au hasard un réel dans un segment $[a;b]$.

Définition 10

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi uniforme sur** $[a;b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$, si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 4

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a;b]$ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Démonstration :

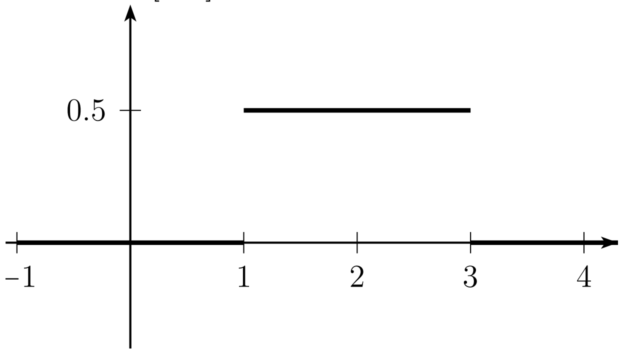
Par définition de la densité, on sait que la fonction de répartition de X est donnée par $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

- Si $x \leqslant a$ sur $]-\infty;x]$ on a $f(t) = 0$ et donc alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
- Si $a < x < b$ alors si $t \in]-\infty;x]$ on a $f(t) = 0$ si $t \leqslant a$ et $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$ si $a < t \leqslant x$ donc
$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$
- Si $x \geqslant b$ alors
$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + \int_{b}^{x} 0\,dt = 0 + \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^b + 0 = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

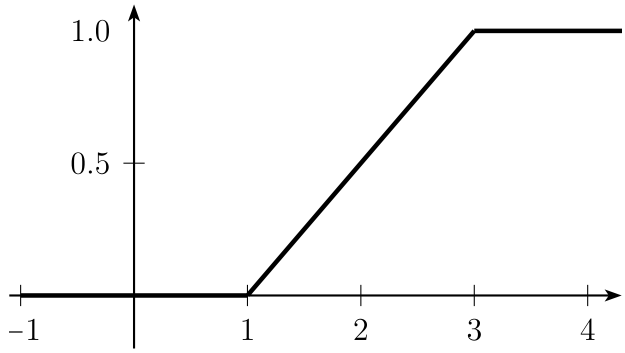
On a donc bien le résultat demandé.

□

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une VAR suivant une loi uniforme sur $[1;3]$:



Densité de la loi $\mathcal{U}([1;3])$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{U}([1;3])$

Théorème 7
Soit X une VAR à densité suivant une loi uniforme sur $[a;b]$. Alors X admet une espérance égale à $\dfrac{a+b}{2}$.

Démonstration :

Sur $]-\infty;a]$ et sir $[b;+\infty[$, la fonction $t \to |tf(t)|$ est nulle donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} |tf(t)|\,dt$ et $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} |tf(t)|\,dt$ sont convergente. De plus $t \to |tf(t)|$ est continue sur $]a;b[$ et admet des limites finies en a et b donc $\displaystyle\int_{a}^{b} |tf(t)|\,dt$ est convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ est donc absolument convergente et X admet donc une espérance.

De plus :

$$E(X) = \int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

□

La variance sera vue en exercice mais doit savoir être retrouvée très vite.

2 Loi exponentielle

Définition 11
Soit λ un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ ; et on note $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Propriété 5
La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration :

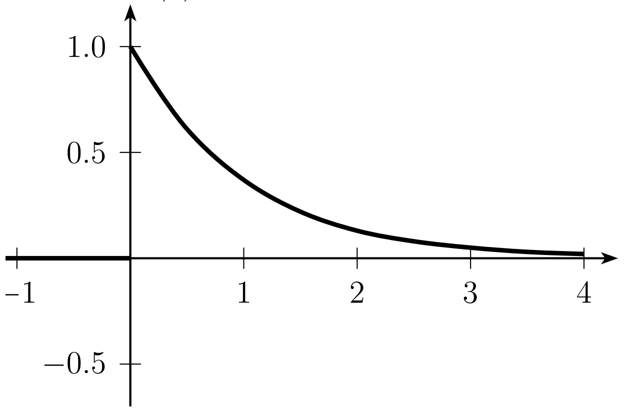
On a pour tout réel x, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

– Si $x<0$ alors pour tout $t\in]-\infty;x]$, $f(t)=0$ et donc $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt=0$.

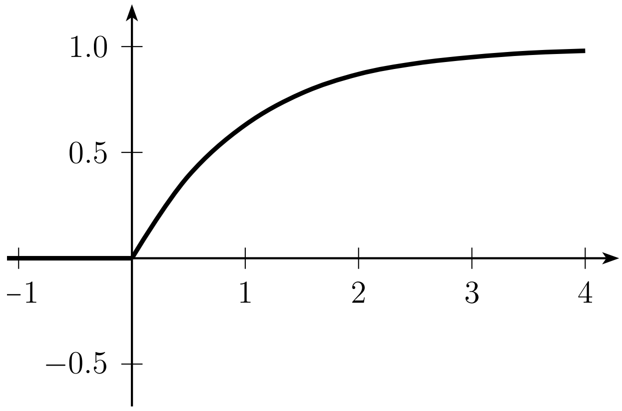
– Si $x\geqslant 0$, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda t}\,dt=\left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x=1-e^{-\lambda x}$

□

Voici la représentation graphique de la densité et de la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(1)$:



Densité de la loi $\mathcal{E}(1)$



Fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(1)$

Théorème 8
Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}\quad V(X)=\frac{1}{\lambda^2}$$

Démonstration :

Calculons uniquement l'espérance.

Sur $]-\infty;0[$ la fonction $t\to|tf(t)|$ est nulle donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}|tf(t)|\,dt$ est convergente et vaut 0.

Sur $[0;+\infty[$ la fonction $t\to|tf(t)|$ est continue donc le problème se pose uniquement en $+\infty$. Soit $A>0$:

$$\int_0^A|tf(t)|\,dt=\int_0^A\lambda te^{-\lambda t}\,dt=\left[-te^{-\lambda t}\right]_0^A+\int_0^A e^{-\lambda t}\,dt=-Ae^{-\lambda A}-\frac{e^{-\lambda A}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}-Ae^{-\lambda A}-\frac{e^{-\lambda A}}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}|tf(t)|\,dt$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,dt$ est absolument convergente donc X admet une espérance et $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

□

Théorème 9
Caractérisation de la loi exponentielle
Soit X une VAR à densité, qui n'est pas la variable certaine nulle et qui est à valeur dans $\mathbb{R}^+$.
X suit une loi exponentielle ssi :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P_{[X>s]}(X > s+t) = P(X > t) \tag{1}$$

Remarque :
L'égalité (1) est équivalente à $P(X > s+t) = P(X > s)P(X > t)$.

Définition 12
Un VAR à densité vérifiant l'égalité (1) est dite **sans mémoire**.

Démonstration : Hors programme

Nous n'allons ici démontrer qu'un sens de l'équivalence :
Soit X suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Alors pour tout réels s et t positifs :

$$\begin{aligned} P_{[X>s]}(X > s+t) &= \frac{P([X > s+t] \cap [X > s])}{P(X > s)} \\ &= \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)} \end{aligned}$$

Or $P(X > s) = \displaystyle\int_s^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = [-e^{-\lambda x}]_s^{+\infty} = e^{-\lambda s}$ et de même $P(X > s+t) = e^{-\lambda(s+t)}$.
Donc :

$$P_{[X>s]}(X > s+t) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

□

3 Loi normale

a Loi normale centrée réduite

Définition 13
On dit qu'une variable aléatoire X suit **la loi normale centrée réduite** si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

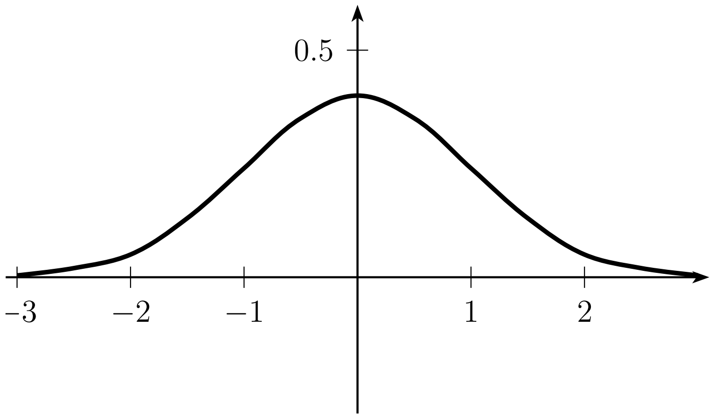
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Remarque :

Pour vérifier que f est une densité de probabilité, il vous faudra admettre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale centrée réduite :



Densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Pour la fonction de répartition, nous ne sommes pas capable de l'exprimer avec de fonctions usuelles. Il faudra cependant bien savoir utiliser la propriété que nous allons mettre ci-dessous et savoir utiliser le tableau de valeurs approchées que nous verrons en exercice.

Propriété 6
Soit Φ la fonction de répartition d'une VAR X suivant la loi $\mathcal{N}[0,1)$. Alors Φ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Démonstration :

Tout repose ici sur le fait que la densité est paire :

$$\begin{aligned}
\Phi(-x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-x} f(t)\,dt \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{-A}^{x} f(-u)\,(-du) \qquad \text{changement de variable } u=-t \\
&= \lim_{A\to-\infty} \int_{x}^{-A} f(u)\,du = \int_{x}^{+\infty} f(u)\,du = 1-\Phi(x)
\end{aligned}$$

□

Théorème 10
Soit X qui suit une loi normale centrée réduite. Alors X admet une espérance et une variance :

$$E(X) = 0 \qquad V(X) = 1$$

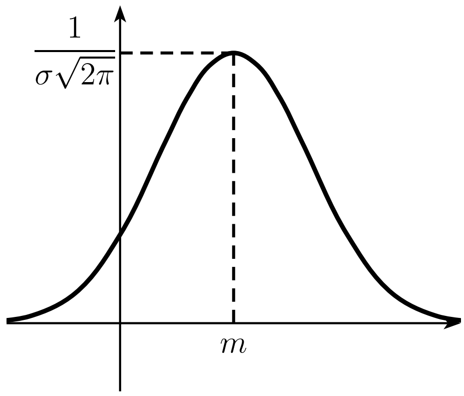
b Loi normale de Laplace-Gauss

Définition 14
Soit m un réel, et σ un réel strictement positif. On dit que X suit **la loi normale de paramètres** (m, σ^2) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Voici la représentation graphique de la densité d'une loi normale.



Densité de la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Théorème 11
Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = m \qquad V(X) = \sigma^2$$

IV Exemples de fonctions d'une variable à densité

Lorsqu'on vous donne une variable à densité X vous devez être capable, pour des fonctions g assez simples, de déterminer une densité de la variable $g(X)$. La méthode est toujours la même et nous allons ici traiter 3 cas de fonctions g simples.

On peut aussi vous demander de calculer l'espérance de $g(X)$. Voici donc le **théorème de transfert** :

Théorème 12
Soient X une VAR de densité f et g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,dt$ est absolument convergente alors la variable $g(X)$ admet une espérance et :

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f(t)\,dt$$

1 *g est affine*

Exemple 8:
Soit X une variable aléatoire de densité f et soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.

On considère la variable aléatoire $Y = aX + b$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

– ***Étape 1 : fonction de répartition de*** Y
On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y.
Le but est d'exprimer G en fonction de F.
Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(aX + b \leqslant x) = P(aX \leqslant x - b)$. Afin de « passer a de l'autre côté » il nous faut différencier 2 cas :
  - *Si $a > 0$, $G(x) = P\left(X \leqslant \dfrac{x-b}{a}\right) = F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$*
  - *Si $a < 0$, $G(x) = P\left(X \geqslant \dfrac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$*

– ***Étape 2 : vérifier que Y est une variable à densité***
On souhaite ici utiliser le théorème 3 donc nous avons deux hypothèses à vérifier sur G.
• *Que a soit positif ou négatif, G est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}$ car F est continue ainsi que la fonction $x \to \dfrac{x-b}{a}$.*
• *Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = ax_i + b$, on voit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{y_1, \cdots, y_n\}$.*
On en déduit donc grâce au théorème 3 que Y est bien une variable à densité.

– ***Étape 3 : donner une densité de Y***
Pour donner une densité de Y il nous faut calculer G'. En tout point où G est dérivable, on a :

$$\begin{cases} \text{si } a > 0 \quad G'(x) = \dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right) \\ \text{si } a < 0 \quad G'(x) = -\dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right) \end{cases}$$

Ainsi en posant $g(x) = \dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$ on a obtenu une densité de Y.

Grâce à cet exemple on peut démontrer la propriété suivante qui montre que toute les lois normales sont liées à la loi normale centrée réduite :

Propriété 7

X suit une loi normale de paramètres (m, σ^2) si et seulement si $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Démonstration : Hors programme

Nous allons ici utiliser ce que nous avons fait dans l'exemple 8, qui nous permet de dire que si X est de densité f alors $aX + b$ est de densité $\dfrac{1}{|a|} f\left(\dfrac{x-b}{a}\right)$

• Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors la densité de $Y = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est :

$$g(x) = \frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sigma(x - m/\sigma) - m)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$

• Supposons que $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors $X = \sigma Y + m$ et donc une densité de X est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2/\sigma^2}{2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Donc $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

□

Cette propriété sera extrêmement importante dans les deux chapitres suivants.

Exemple 9:

Soit X une variable aléatoire de densité f.

On considère la variable aléatoire $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

- ***Étape 1 : fonction de répartition de*** Y

  On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y.

  Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x)$

  • *Si $x < 0$, $G(x) = 0$.*

  • *Si $x \geqslant 0$, $G(x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$*
- ***Étape 2 : vérifier que*** Y ***est une variable à densité***

  • *G est bien évidemment continue sur $]-\infty;0[$ et par opération sur les fonctions continues, G est continue sur $]0;+\infty[$. De plus $\lim\limits_{0^+} G = F(0) - F(0) = 0 = \lim\limits_{0^-} G = G(0)$ donc G est en fait continue sur $\mathbb{R}$.*

  • *Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = x_i^2$, on voit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \cdots, y_n\}$.*

  On en déduit donc grâce au théorème 3 que Y est bien une variable à densité.
- ***Étape 3 : donner une densité de*** Y

  Lorsque $G'(x)$ existe, on a $G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

  Donc en posant : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *on obtient une densité de Y.*

3 Fonction exponentielle

Exemple 10:

Soit X une variable aléatoire de densité f.

On considère la variable aléatoire $Y = e^X$. Montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

- ***Étape 1 : fonction de répartition de*** Y

  On pose F la fonction de répartition de X et G celle de Y.

  Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(e^X \leqslant x)$

  • *Si $x \leqslant 0$, $G(x) = 0$.*

  • *Si $x > 0$, $G(x) = P(X \leqslant \ln(x)) = F(\ln(x))$*
- ***Étape 2 : vérifier que*** Y ***est une variable à densité***

  • *G est bien évidemment continue sur $]-\infty;0[$ et par opération sur les fonctions continues, G est continue sur $]0;+\infty[$. De plus $\lim\limits_{0^+} G = 0$ car $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, et comme $\lim\limits_{0^-} G = 0 = G(0)$, G est en fait continue sur $\mathbb{R}$.*

  • *Si on note $x_1, \cdots, x_n$ les points où F n'est pas dérivable, alors en posant $y_i = e^{x_i}$, on voit que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, y_1, \cdots, y_n\}$.*

  On en déduit donc grâce au théorème 3 que Y est bien une variable à densité.
- ***Étape 3 : donner une densité de*** Y

  • *Lorsque $G'(x)$ existe, on a* $G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

  Donc en posant : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{x} f(\ln(x)) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ *on obtient une densité de Y.*

A savoir

- Je dois savoir répondre à la question « Montrer que f est une densité de probabilité. »(cf. théo 1)
- Si on me donne une VAR X dont je connais la densité f je dois savoir calculer sa fonction de répartition grâce à la formule : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$. (cf. exercice 1)
- Si je connais la fonction de répartition F d'une VAR X je dois savoir répondre à la question « Montrer que X est une VAR à densité et donner une densité de X. »(cf. théo 3)
- Si on me donne une fonction F, sans rien me dire de plus, je dois savoir répondre à la question « Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité X et donner une densité de X. »(cf. théo 4)
  La différence avec le point d'avant est qu'ici on ne sait pas déjà que F est une fonction de répartition.
- Je dois savoir rapidement faire le lien entre des calculs de probabilités, la densité et la fonction de répartition. Soit X une VAR de densité f et de fonction de répartition F :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X = a) = 0$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X \leqslant a) = P(X < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - F(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f(t)\ dt = \int_{a}^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)\ dt$$

la formule est aussi valable avec des inégalités strictes

- Je dois connaitre la définition de l'indépendance de VAR à densité (cf. définition 2)
- Je dois connaitre la définition de l'espérance, du moment d'ordre r, et de la variance d'une VAR à densité (cf. définitions 3, 5 et 6) et je dois savoir les reconnaitre dans un exercice pour utiliser les variables usuelles (cf. exercice 14).
- Je dois connaitre les propriétés de l'espérance : théorème de transfert, linéarité, ...
- Je dois savoir construire la variable centrée réduite associée à n'importe quelle variable aléatoire X. On la note X^* :

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

- Lois usuelles :

	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
$\mathcal{U}([a;b])$	$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$	$V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$	$E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$	$V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
$\mathcal{N}(0,1)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$	$\Phi(x)$	$E(X) = 0$	$V(X) = 1$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)$		$E(X) = m$	$V(X) = \sigma^2$

- Je dois savoir bien manipuler la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite : formule $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ et savoir lire le tableau de valeur de Φ.
- Je dois savoir que si X suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$ alors X^* suit la loi normale centrée réduite.
- Si on me donne une VAR X je dois savoir trouver la fonction de répartition d'une VAR Y qui s'exprime en fonction de X (par exemple $2X - 1$, X^2, e^X, ...)