Exercices : Variables aléatoires à densité

Exercice 1:

Déterminer si les fonctions suivantes sont des densités de probabilité et si oui déterminer la fonction de répartition de la VAR associée à cette densité.

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

2. $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{1}{2\ln 2}e^{-t}\ln(1+e^t) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ On pensera au changement de variable $u = e^{-t}$.

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin]1;2] \\ \dfrac{a}{\sqrt{t-1}} & \text{si } t \in]1;2] \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité

Exercice 3:

Déterminer si les fonctions suivantes sont les fonctions de répartition d'une variable à densité. Si oui, en donner une densité.

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$

Exercice 4:

Soit X une VAR dont la fonction de répartition F est définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

Exercice 5:

Calculer, si elle existe, l'espérance de la variable X dont une densité est :

1. $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4te^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

2. $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{4\ln t}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 6:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire Y.
2. Déterminer la fonction de répartition F de la variable Y. Construire sa représentation graphique dans un repère orthonormal.
3. Calculer l'espérance de la variable Y.
4. Calculer la probabilité de l'événement $[0,488 < Y \leqslant 1,2]$

Exercice 7:

Reprendre l'exercice 5 et calculer, si elle existe, la variance de la variable aléatoire associée aux densités données.

Exercice 8:

Soit X une VAR qui suit une loi uniforme sur $[a;b]$. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 9:

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entrainement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

On donne au dos la table de valeurs de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 10:

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.
2. Déterminer une densité de X^2.
3. Déterminer une densité de X^3.

Exercice 11:

Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition F est strictement croissante. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = F(X)$.

Exercice 12:

Soit X une variable aléatoire dont une densité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer la fonction de répartition G de Y puis montrer que Y est une variable à densité et donner une densité de Y.

Exercice 13:

Soit X une VAR admettant une densité f. On suppose que X prends ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soit $Y = [X]$ (partie entière de X)

1. Déterminer la loi de Y.
2. a) Montrer que $E(Y)$ existe si et seulement si $E(X)$ existe.
   b) Montrer que si $E(X)$ existe alors : $E(Y) \leqslant E(X) \leqslant E(Y) + 1$.

Exercice 14:

Après enquête, on estime que le temps de passage à une caisse, exprimé en unités de temps, est une variable aléatoire T dont une densité de probabilité est donnée par la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Rappeler la définition d'une densité de probabilité d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.
2. Utiliser la question précédente pour vérifier que f est bien une densité de probabilité, puis montrer que T admet une espérance que l'on déterminera.
   Quel est le temps moyen de passage en caisse ?
3. a) Démontrer que la fonction de répartition de T, notée F_T est définie par :

   $$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   b) Montrer que la probabilité que le temps de passage en caisse soit inférieur à deux unités(de temps) sachant qu'il est supérieur à une unité est égale à $\dfrac{2e-3}{2e}$.
4. Un jour donné, trois clients A, B, C se présentent simultanément devant deux caisses libres. Par courtoisie, C décide de laisser passer A et B et de prendre la place du premier d'entre eux qui aura terminé. On suppose que les variables T_A et T_B correspondant au temps de passage en caisse de A et B sont indépendantes.

   a) M désignant le temps d'attente du client C exprimer M en fonction de T_A et T_B.

   b) Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire M est donnée par :

   $$P(M \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - (1+t)^2 e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

   c) Prouver que M est une variable à densité et expliciter une densité de M.

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

$\boxed{\textit{Correction}}$

Exercice 1:

1. (i) On remarque tout d'abord que g est bien une fonction positive car $0 \geqslant 0$ et pour $t \geqslant 0$, $4te^{-2t} \geqslant 0$.

   (ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$ et par produit de fonctions continues, la fonction $t \to 4te^{-2t}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc g est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus $\lim\limits_{0^-} g = 0 = \lim\limits_{0^+} g = g(0)$ donc g est en fait continue sur $\mathbb{R}$.
   (Dans notre théorème il suffit que la fonction soit continue sauf éventuellement en un nombre fini de points donc nous ne sommes pas obligés de vérifier la continuité de g en 0.)

   (iii) Comme g est nulle sur $]-\infty;0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt$ est convergente et vaut 0.
   Sur $[0;+\infty[$, g est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(t)\,dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.
   Soit $A > 0$, par intégration par parties :
   $$\int_0^A 4te^{-2t}\,dt = \left[-2te^{-2t}\right]_0^A + \int_0^A 2e^{-2t}\,dt = -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$$
   Or $\lim\limits_{A\to+\infty} -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1 = 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.
   En conclusion $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

   $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité.}}$

   Soit X une VAR de densité g. Notons G sa fonction de répartition. Par définition $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt$.
   Si $x < 0$ alors $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
   Si $x \geqslant 0$ alors $G(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x 4te^{-2t}\,dt = 0 - 2xe^{-2x} - e^{-2x} + 1 = 1 - (2x+1)e^{-2x}$. *(Inutile de refaire le calcul, il a été fait dans le point (iii).)*

   $$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (2x+1)e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

2. (i) On remarque tout d'abord que u est bien une fonction positive car $0 \geqslant 0$ et pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2 \geqslant 0$.

   (ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$ et par produit de fonctions continues, la fonction $t \to \dfrac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc u est continue sur $\mathbb{R}^*$.
   De plus $\lim\limits_{0^-} u = 0 = \lim\limits_{0^+} u = u(0)$ donc u est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

   (iii) Comme u est nulle sur $]-\infty;0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} u(t)\,dt$ est convergente et vaut 0.
   Sur $[0;+\infty[$, u est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.
   Soit $A > 0$:
   $$\int_0^A \frac{3}{2}e^{-t/2}\left(1 - e^{-t/2}\right)^2\,dt = \left[(1 - e^{-t/2})^3\right]_0^A = (1 - e^{-A/2})^3$$

Or $\lim_{A\to+\infty}(1-e^{-A/2})^3 = 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

En conclusion $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

$\boxed{u \text{ est une densité de probabilité.}}$

Soit X une VAR de densité u. Notons U sa fonction de répartition. Par définition $U(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} u(t)\,dt$.

Si $x < 0$ alors $U(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

Si $x \geqslant 0$ alors $U(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{3}{2}e^{-t/2}\left(1-e^{-t/2}\right)^2\,dt = (1-e^{-x/2})^3$. *(Inutile de refaire le calcul, il a été fait dans le point (iii).)*

$$\boxed{U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-e^{-x/2})^3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

3. (i) On remarque tout d'abord que f est bien une fonction positive car $0 \geqslant 0$ et pour $t \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2\ln 2}e^{-t}\ln(1+e^t) \geqslant 0$.

 (ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$ et par produit de fonctions continues, la fonction $t \to \dfrac{1}{2\ln 2}e^{-t}\ln(1+e^t)$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
 f est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

 (iii) Comme f est nulle sur $]-\infty;0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt$ est convergente et vaut 0.

 Sur $[0;+\infty[$, f est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.

 Soit $A > 0$, grâce au changement de variable $u = e^{-t}$ (qui nous donne $t = -\ln(u)$ et donc $dt = -\dfrac{1}{u}du$) :

$$\begin{aligned}
\int_0^A \frac{1}{2\ln 2}e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt &= \frac{1}{2\ln 2}\int_1^{e^{-A}} u\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)\frac{-1}{u}\,du = \frac{-1}{2\ln 2}\int_1^{e^{-A}} \ln\left(\frac{1+u}{u}\right)\,du \\
&= \frac{-1}{2\ln 2}\int_1^{e^{-A}} \left(\ln(1+u)-\ln(u)\right)\,du \\
&= \frac{-1}{2\ln 2}\left[(1+u)\ln(1+u)-(1+u)-u\ln(u)+u\right]_1^{e^{-A}} \\
&= \frac{-1}{2\ln 2}\left((1+e^{-A})\ln(1+e^{-A})-1-e^{-A}\ln(e^{-A})-2\ln 2+1\right) \\
&= 1-\frac{(1+e^{-A})\ln(1+e^{-A})}{2\ln 2}-\frac{Ae^{-A}}{2\ln 2}
\end{aligned}$$

 Or $\lim_{A\to+\infty} 1-\dfrac{(1+e^{-A})\ln(1+e^{-A})}{2\ln 2}-\dfrac{Ae^{-A}}{2\ln 2} = 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

 En conclusion $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut 1.

$\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

Soit X une VAR de densité f. Notons F sa fonction de répartition. Par définition $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

Si $x < 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

Si $x \geqslant 0$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{1}{2\ln 2} e^{-t}\ln(1+e^t)\,dt = 1 - \frac{(1+e^{-x})\ln(1+e^{-x})}{2\ln 2} - \frac{xe^{-x}}{2\ln 2}$. *(Inutile de refaire le calcul, il a été fait dans le point (iii).)*

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{(1+e^{-x})\ln(1+e^{-x})}{2\ln 2} - \dfrac{xe^{-x}}{2\ln 2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

Exercice 2:

(i) On remarque tout d'abord que pour que f soit bien une fonction positive il faut que $a \geqslant 0$ car $0 \geqslant 0$ et pour $t \in]1;2]$, $\frac{a}{\sqrt{t-1}} \geqslant 0 \Leftrightarrow a \geqslant 0$.

(ii) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;1] \cup]2;+\infty[$ et la fonction $t \to \frac{a}{\sqrt{t-1}}$ est continue sur $]1;2]$ pour toute valeur de a.
Quelle que soit la valeur de a, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1;2\}$.

(iii) Comme f est nulle sur $]-\infty;1] \cup]2;+\infty[$, les intégrales $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt$ et $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ sont convergentes et valent 0.
Sur $]1;2]$, f est continue donc l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,dt$ ne pose problème qu'en 1.
Soit $1 < A \leqslant 2$, :

$$\int_A^2 \frac{a}{\sqrt{t-1}}\,dt = \left[2a\sqrt{t-1}\right]_A^2 = 2a - 2a\sqrt{A-1}$$

Or $\lim_{A\to 1} 2a - 2a\sqrt{A-1} = 2a$ donc l'intégrale $\int_1^2 f(t)\,dt$ est convergente et vaut $2a$.
En conclusion $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente et vaut $2a$.

$\boxed{\text{Pour que } f \text{ soit une densité de probabilité il faut donc que } a = \frac{1}{2}.}$

Exercice 3:

1. (i) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$ et par produit de fonctions continues, la fonction $x \to 1 - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus $\lim_{0^-} F = 0 = \lim_{0^+} F = F(0)$ donc F est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour les même raisons que la continuité sur $\mathbb{R}^*$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}^*$.

(iii) Sur $]-\infty;0[$, F est constante donc croissante.
Sur $]0;+\infty[$, $F'(x) = -\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x} + \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} = \frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x}$. Donc pour $x > 0$, $F'(x) \geqslant 0$ et donc F est croissante sur $]0;+\infty[$.
F est croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et comme F est continue sur $\mathbb{R}$, F est croissante sur $\mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0$ et grâce aux croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 e^{-x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

$\boxed{F \text{ est bien la fonction de répartition d'une variable à densité } X.}$

$\boxed{\text{Une densité de } X \text{ est par exemple } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{2}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$

Il suffit de prendre la dérivée de F pour obtenir une densité.

2. (i) La fonction $x \to 1 + e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier continue sur $\mathbb{R}$.

 (ii) Pour les même raisons que la continuité sur $\mathbb{R}$, F est de classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}$.

 (iii) Pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Donc pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) \geqslant 0$ et donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

 (iv) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{1}{1+e^x} = 1 - 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1 - 0 = 1$.

$\boxed{F \text{ est bien la fonction de répartition d'une variable à densité } X.}$

$\boxed{\text{Une densité de } X \text{ est par exemple } f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}.}$

Exercice 4:

(i) La fonction nulle est continue sur $]-\infty;0[$ et par produit de fonctions continues, la fonction $x \to 1 - e^{-x^2/2}$ est continue sur $]0;+\infty[$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}^*$.
De plus $\lim\limits_{0^-} F = 0 = \lim\limits_{0^+} F = F(0)$ donc F est en fait continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[$ et par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction $x \to 1 - e^{-x^2/2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\boxed{X \text{ est donc une variable à densité.}}$

Pour obtenir une densité il suffit de dériver F là où F est dérivable.

$\boxed{\text{Une densité de } X \text{ est par exemple } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x^2/2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$

Exercice 5:

1. Comme $t \to t\,g(t)$ est nulle sur $]-\infty;0[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\,g(t)\,dt$ est absolument convergente et vaut 0.

 Sur $[0;+\infty[$, $t \to |t\,g(t)|$ est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |t\,g(t)|\,dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.

 Soit $A > 0$, par intégration par parties :

$$\int_0^A |t\,g(t)|\,dt = \int_0^A 4t^2e^{-2t}\,dt = \left[-2t^2e^{-2t}\right]_0^A + \int_0^A 4te^{-2t}\,dt = -2A^2e^{-2A} + \int_0^A 4te^{-2t}\,dt$$

 Dans l'exercice 1 on a calculé : $\displaystyle\int_0^A 4te^{-2t}\,dt = -2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$

 Donc $\displaystyle\int_0^A |t\,g(t)|\,dt = -2A^2e^{-2A} - 2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$.

 Or $\lim\limits_{A\to+\infty} -2A^2e^{-2A} - 2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1 = 1$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ est absolument convergente et vaut 1.

 En conclusion $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,g(t)\,dt$ est absolument convergente et vaut 1.

$\boxed{X \text{ admet donc une espérance et } E(X) = 1.}$

2. Comme $t \to t\, h(t)$ est nulle sur $]-\infty;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t\, h(t)\, dt$ est absolument convergente et vaut 0.

Sur $[1;+\infty[$, $t \to |t\, h(t)|$ est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} |t\, h(t)|\, dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.

Soit $A > 1$, par intégration par parties :

$$\int_1^A |t\, h(t)|\, dt = \int_1^A \frac{4\ln(t)}{t^2}\, dt = \left[-\frac{4\ln(t)}{t}\right]_1^A + \int_1^A \frac{4}{t^2}\, dt = -\frac{4\ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} -\frac{4\ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + 4 = 4$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\, h(t)\, dt$ est absolument convergente et vaut 4.

En conclusion $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t\, h(t)|\, dt$ est convergente et vaut 4.

$\boxed{X \text{ admet donc une espérance et } E(X) = 4.}$

Exercice 6:

1. (i) Pour $x \notin [0;1]$ on a $f(x) = 0 \geqslant 0$ et si $x \in [0;1]$, $(1-x) \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant 0$.
   f est bien une fonction à valeurs positives.

   (ii) f est bien continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]1;+\infty[$ car f est la fonction nulle sur ces intervalles.
   Sur $]0;1[$ f est la composée de fonction continues donc f est continue.
   f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

   (iii) Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f(x)\, dx$ sont convergentes car f est nulle sur ces intervalles et ces intégrales valent 0.
   Sur $[0;1]$ la fonction f est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx$ est convergente. De plus :

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \left[-(1-x)^{4/3}\right]_0^1 = 1$$

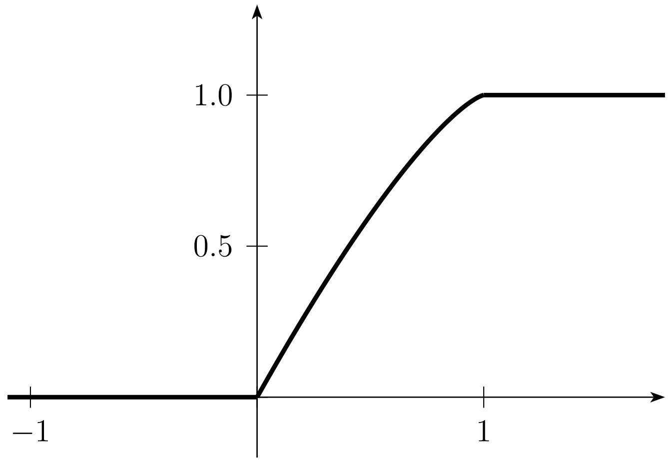
   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

   $\boxed{f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$

2. Par définition $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$.

- Si $x < 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \frac{4}{3}(1-t)^{1/3}\, dt = 1 - (1-x)^{4/3}$.
- Si $x > 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^x f(t)\, dt = \int_0^1 \frac{4}{3}(1-t)^{1/3}\, dt = 1$.

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^{4/3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$



3. Pour les mêmes raisons qu'à la question 1, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$ est absolument convergente donc Y admet une espérance et :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x(1-x)^{1/3}\,dx$$
$$= \left[-x(1-x)^{4/3}\right]_0^1 + \int_0^1 (1-x)^{4/3}\,dx = \left[-\frac{3}{7}(1-x)^{7/3}\right]_0^1 = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{E(Y) = \frac{3}{7}}$$

4. $P(0,488 < Y \leqslant 1,2) = F(1,2) - F(0,488) = 1 - 1 + (1-0,488)^{4/3} = (0,512)^{4/3} = 0,4096$

Exercice 7:

1. On a déjà vu que X admet une espérance et que $E(X) = 1$. Montrons maintenant que X admet un moment d'ordre 2.
$t \to t^2\ g(t)$ est nulle sur $]-\infty;0[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{0} t^2\ g(t)\,dt$ est absolument convergente et vaut 0.
Sur $[0;+\infty[$, $t \to |t^2\ g(t)| = t^2 g(t)$ est continue donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^2\ g(t)\,dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.
Soit $A > 0$, par intégration par parties :

$$\int_0^A t^2\ g(t)\,dt = \int_0^A 4t^3 e^{-2t}\,dt = \left[-2t^3 e^{-2t}\right]_0^A + \int_0^A 6t^2 e^{-2t}\,dt = -2A^3 e^{-2A} + \frac{3}{2}\int_0^A 4t^2 e^{-2t}\,dt$$

On a déjà calculé dans l'exercice 5 : $\int_0^A 4t^2 e^{-2t}\,dt = -2A^2 e^{-2A} - 2Ae^{-2A} - e^{-2A} + 1$.
Donc $\int_0^A t^2\ g(t)\,dt = -2A^3 e^{-2A} - 3A^2 e^{-2A} - 3Ae^{-2A} - \frac{3}{2}e^{-2A} + \frac{3}{2}$.
Or $\lim\limits_{A \to +\infty} -2A^3 e^{-2A} - 3A^2 e^{-2A} - 3Ae^{-2A} - \frac{3}{2}e^{-2A} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.
Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 g(t)\,dt$ converge absolument et $E(X^2) = \frac{3}{2}$.

$\boxed{\text{On a donc } V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}}$

2. On a déjà vu que X admet une espérance et que $E(X)=4$. Montrons maintenant que X admet un moment d'ordre 2.

   Comme $t \to t^2\ h(t)$ est nulle sur $]-\infty;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} t^2\ h(t)\,dt$ est absolument convergente et vaut 0.

   Sur $[1;+\infty[$, $t \to |t^2\ h(t)| = t^2h(t)$ est continue donc l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} t^2\ h(t)\,dt$ ne pose problème qu'en $+\infty$.

   Soit $A>1$:
$$\int_1^A t^2\ h(t)\,dt = \int_1^A \frac{4\ln(t)}{t}\,dt = \left[2(\ln(t))^2\right]_1^A = 2(\ln(A))^2$$
   Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} 2(\ln(A))^2 = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\ h(t)\,dt$ est divergente.

   X n'admet donc pas de moment d'ordre 2 et donc $\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$

Exercice 8:

On rappelle qu'une densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[a;b]$ est :
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
On sait déjà que X admet une espérance et que $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$.

Montrons que X admet un moment d'ordre 2.

$t \to t^2 f(t)$ est nulle sur $]-\infty;a[$ et sur $]b;+\infty[$ donc les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} t^2 f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{b}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ sont convergentes et valent 0.

De plus $t \to t^2 f(t)$ est continue sur $[a;b]$ donc $\displaystyle\int_a^b t^2 f(t)\,dt$ est convergente.

X admet donc un moment d'ordre 2 et :
$$E(X^2) = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$
car $b^3-a^3 = (b-a)(b^2+ab+a^2)$ (division euclidienne).

X admet donc une variance et
$$\begin{aligned} V(X) = E(X^2) - E(X^2) &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \\ &= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} = \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\ &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Exercice 9:

Notons X la VAR égale à la distance parcourue par le javelot. D'après l'énoncé, X suit une loi normale de paramètres m et σ.

Le but de cet exercice est de trouver m et σ.

L'énoncé nous dit que :
$$P(X>75) = 0,1 \qquad \text{et} \qquad P(X<50) = 0,25$$

On sait d'après le cours que lorsque X suit une loi normale de paramètres m et σ alors $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale de paramètres 0 et 1.

Or $P(X > 75) = P(X - m > 75 - m) = P\left(\dfrac{X-m}{\sigma} > \dfrac{75-m}{\sigma}\right) = P\left(X^* > \dfrac{75-m}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{75-m}{\sigma}\right)$.

On a donc $1 - \Phi\left(\dfrac{75-m}{\sigma}\right) = 0,1 \Leftrightarrow \Phi\left(\dfrac{75-m}{\sigma}\right) = 0,9$.

D'après la table de valeurs on a donc $\dfrac{75-m}{\sigma} \approx 1,28$.

De même $P(X < 50) = \Phi\left(\dfrac{50-m}{\sigma}\right) = 0,25$.

Dans la table on ne trouve pas la valeur $0,25$ donc on va utiliser une petite astuce : $\Phi(-t) = 1 - \Phi(t)$.

On a donc $\Phi\left(\dfrac{50-m}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\dfrac{m-50}{\sigma}\right) = 0,25 \Leftrightarrow \Phi\left(\dfrac{m-50}{\sigma}\right) = 0,75$.

On déduit de la table de valeur que $\dfrac{m-50}{\sigma} \approx 0,67$.

Il nous faut donc maintenant résoudre le système :

$$\begin{cases} \dfrac{75-m}{\sigma} \approx 1,28 \\ \dfrac{m-50}{\sigma} \approx 0,67 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 75 - m \approx 1,28\sigma \\ m - 50 \approx 0,67\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \approx 58,59 \\ \sigma \approx 12,82 \end{cases}$$

$\boxed{\text{La longueur moyenne parcourue par le javelot est } 58,69 \text{ et l'écart type est } 12,82.}$

Exercice 10:

On rappelle que la fonction de répartition d'une VAR X qui suit un loi exponentielle de paramètre λ est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. Notons G la fonction de répartition de Y. Par définition $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(\sqrt{X} \leqslant x)$.
   - Si $x < 0$, $P(\sqrt{X} \leqslant x) = 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, $P(\sqrt{X} \leqslant x) = P(X \leqslant x^2) = F(x^2) = 1 - e^{-\lambda x^2}$

   On a donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

   On montre facilement que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc G est la fonction de répartition d'une variable à densité et une densité de Y est par exemple :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda x e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. On pose $Z = X^2$ et on note H la fonction de répartition de Z.
   Par définition $H(x) = P(Z \leqslant x) = P(X^2 \leqslant x)$.
   - Si $x < 0$, $P(X^2 \leqslant x) = 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, $P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$ car $F(-\sqrt{x}) = 0$.

   On a donc $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

H est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc Z est une variable à densité et une densité de Z est par exemple :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. On note T la fonction de répartition de X^3.
   Par définition $T(x) = P(X^3 \leqslant x)$.
   - Si $x < 0$, $P(X^3 \leqslant x) = 0$.
   - Si $x \geqslant 0$, $P(X^3 \leqslant x) = P(X \leqslant x^{1/3}) = F(x^{1/3}) = 1 - e^{-\lambda x^{1/3}}$.

   On a donc $T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

   T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc X^3 est une variable à densité et une densité de X^3 est par exemple :

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{3x^{2/3}} e^{-\lambda x^{1/3}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 11:

F est strictement croissante d'après les hypothèses de l'énoncé et est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est la fonction de répartition d'une variable **à densité**. Donc d'après le théorème de bijection monotone, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim\limits_{-\infty} F; \lim\limits_{+\infty} F[=]0;1[$.

On note G fonction de répartition de la VAR $Y = F(X)$.
Par définition $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(F(X) \leqslant x)$.
- Si $x < 0$ alors $G(x) = 0$ (il est impossible d'avoir $F(X) < 0$)
- Si $x > 1$ alors $G(x) = 1$ car l'événement $[F(X) \leqslant 1]$ est certain.
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors $G(x) = P(X \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x$.

On a donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

On reconnait ici la fonction de répartition d'une VAR qui suit une loi uniforme sur $[0;1]$.

$\boxed{F(X) \text{ suit une loi uniforme sur } [0;1].}$

Exercice 12:

1. Par définition $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
   - Si $x < -\ln 2$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.
   - Si $-\ln 2 \leqslant x < 0$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\ln 2} 0\,dt + \int_{-\ln 2}^{x} e^{-(-t)}\,dt = \left[e^t\right]_{-\ln 2}^{x} = e^x - \frac{1}{2}$$

   - Si $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\ln 2} 0\,dt + \int_{-\ln 2}^{0} e^{-(-t)}\,dt + \int_{0}^{x} e^{-t}\,dt = \left[e^t\right]_{-\ln 2}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{0}^{x} = 1 - \frac{1}{2} - e^{-x} + 1 = \frac{3}{2} - e^{-x}$$

   - Si $x > \ln 2$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\ln 2} 0\,dt + \int_{-\ln 2}^{0} e^{-(-t)}\,dt + \int_{0}^{\ln 2} e^{-t}\,dt + \int_{\ln 2}^{x} 0\,dt = \left[e^t\right]_{-\ln 2}^{0} + \left[-e^{-t}\right]_{0}^{\ln 2} = 1$$

On a donc $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\ln 2 \\ e^x - \dfrac{1}{2} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{3}{2} - e^{-x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$

2. Par définition $G(x) = P(Y \leqslant x) = P(|X| \leqslant x)$.
   - Si $x < 0$ alors $G(x) = 0$
   - Si $x \geqslant 0$ alors $P(|X| \leqslant x) = P(-x \leqslant X \leqslant x) = F(x) - F(-x)$.

   Donc si $x > \ln 2$, $G(x) = 1 - 0 = 1$ et si $0 \leqslant x \leqslant \ln 2$ alors $G((x) = \dfrac{3}{2} - e^{-x} - e^{-x} + \dfrac{1}{2} = 2(1 - e^{-x})$

   On a donc $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2(1 - e^{-x}) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 1 & \text{si } x > \ln 2 \end{cases}$.

   On montre facilement que G est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \ln 2\}$.
   Y est donc bien une variable à densité et une densité de Y est par exemple

$$g(x) = \begin{cases} 2e^{-x} & \text{si } x \in [0; \ln 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 13:

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y = k) = P([X] = k) = P(k \leqslant X < k + 1) = \int_k^{k+1} f(t)\, dt$$

2. a) On a ici une équivalence à démontrer donc on va montrer les deux implications.
   - $\underline{\Rightarrow}$:

   Si $E(Y)$ existe alors $\sum k \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt$ est convergente.

   On veut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ est convergente car on sait que f est nulle sur $]-\infty; 0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt$ est convergente et vaut 0.

   Or on remarque que s'il y a convergence : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} t f(t)\, dt$. Montrons donc plutôt que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \int_k^{k+1} t f(t)\, dt$ est convergente.

   On a $\forall t \in [k; k+1]$, $t f(t) \leqslant (k+1) f(t) = k f(t) + f(t)$ donc $\displaystyle\int_k^{k+1} t f(t)\, dt \leqslant k \int_k^{k+1} f(t)\, dt + \int_k^{k+1} f(t)\, dt$.

   On sait que $\sum k \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt$ converge et de plus $\sum \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\, dt$ converge car $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.

   Donc $\sum \displaystyle\int_k^{k+1} t f(t)\, dt$ est convergente et ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt$ est convergente.

X admet donc une espérance.

- $\Leftarrow$:

Si $E(X)$ existe alors $\sum \int_k^{k+1} tf(t)\,dt$ est convergente.

Or on a $k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,dt$ donc $\sum k\int_k^{k+1} f(t)\,dt$ est convergente et ainsi Y admet une espérance.

b) Supposons que $E(X)$ existe (alors $E(Y)$ existe). On a vu que

$$\begin{aligned}
&k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} tf(t)\,dt \leqslant k\int_k^{k+1} f(t)\,dt + \int_k^{k+1} f(t)\,dt \\
\Rightarrow &\sum_{k=0}^{+\infty} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1} tf(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} k\int_k^{k+1} f(t)\,dt + \sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1} f(t)\,dt \\
\Rightarrow &E(Y) \leqslant E(X) \leqslant E(Y)+1
\end{aligned}$$

Exercice 14: ECRICOME 2007

1. Une densité d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1 est

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

De plus on a $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$.

2. La fonction f est nulle sur $]-\infty;0[$ donc sur cet intervalle c'est une fonction continue et positive. Sur $]0;+\infty[$ f est le produit de deux fonction continue sur ce même intervalle donc f est continue sur $]0;+\infty[$. De plus sur cet intervalle x est positif et l'exponentielle est toujours positive, donc f est positive sur cet intervalle.
De plus $\lim\limits_{0^+} f = \lim\limits_{0^-} f = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0.
Ainsi f est une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$.
Il nous reste à étudier la convergence et la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Or on remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,dx$ et comme on sait que X admet un espérance on peut affirmer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente et vaut $E(X) = 1$.
Donc f est bien une densité de probabilité.
Si $E(T)$ existe, on a $E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,dx$. Comme on sait que X admet une variance, on peut donc dire que X admet un moment d'ordre 2 et donc T admet une espérance. D'après la formule de Kœnig,

$$E(T) = E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = 2$$

Ainsi le temps moyen de passage en caisse est de deux unités de temps.

3. a) Par définition de la fonction de répartition $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

- Si $x < 0$, $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$

- Si $x \geqslant 0$, $F_T(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} te^{-t}\,dt$. Donc

$$F_T(x) = \int_0^x te^{-t}\,dt = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t}\,dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

On a donc bien

$$F_t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(x+1)e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) On veut calculer

$$\begin{aligned} P_{[T\geqslant 1]}(T \leqslant 2) &= \frac{P([T \geqslant 1] \cap [T \leqslant 2])}{P(T \geqslant 1)} \\ &= \frac{P(1 \leqslant T \leqslant 2)}{1 - P(T \leqslant 1)} = \frac{F_T(2) - F_T(1)}{1 - F_T(1)} \\ &= \frac{-3e^{-2} + 2e^{-1}}{2e^{-1}} = \frac{2e-3}{2e} \quad \text{en multipliant en haut et en bas par } e^2 \end{aligned}$$

4. a) Le client C pourra passer en caisse dès que le plus rapide de A ou B aura fini. Donc le temps d'attente de C correspond au plus petit temps de passage entre A et B :

$$M = \min(T_A, T_B)$$

b) Les temps de passage T_A et T_B n'étant jamais négatifs, lorsque $t \in]-\infty; 0[$, $P(M \leqslant t) = 0$.
Si $t \in \mathbb{R}^+$, alors

$$\begin{aligned} P(M \leqslant t) &= 1 - P(M > t) = 1 - P([T_A > t] \cap [T_B > t]) \\ &= 1 - P([T_A > t]) \times P([T_B > t]) \quad \text{car les temps de passage des clients sont indépendants} \\ &= 1 - (1 - F_{T_A}(t))(1 - F_{T_B}(t)) \\ &= 1 - (t+1)e^{-t} \times (t+1)e^{-t} \\ &= 1 - (t+1)^2 e^{-2t} \end{aligned}$$

Dons on a bien

$$P(M \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(t+1)^2e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

c) Notons H la fonction de répartition de M. ($H(t) = P(M \leqslant t)$)
Il nous faut montrer que H est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut être en un nombre fini de point pour pouvoir affirmer que M est une variable à densité.
- Sur $]-\infty : 0[$, H est la fonction nulle donc c'est une fonction $\mathcal{C}^1$.
- Sur $]0; +\infty[$, les fonction $t \to (1+t)^2$ et $t \to e^{-t}$ sont $\mathcal{C}^1$ donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.
- Il nous reste à étudier la continuité en 0. On a $\lim\limits_{0^-} H = 0$ et $\lim\limits_{0^+} H = 1 - 1 = 0 = H(0)$ donc H est bien continue en 0.

Ainsi H est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
M est donc bien une variable à densité.
Pour obtenir une densité de M, il faut dériver H et compléter aux points où H n'est pas dérivable.
Une densité de M est donc le fonction suivante :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t(1+t)e^{-2t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$