Convergences et approximations

Dans tout ce chapitre, les démonstrations seront faites dans le cas des variables discrètes et des variables à densité.

I Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 1
Soit X une VAR admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration :

Comme X admet un moment d'ordre 2, X admet bien une espérance et une variance.
• Si X est une variable discrète :
On pose $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $p_i = P(X = x_i)$.
Par définition on sait que $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$. Donc d'après le théorème de transfert :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p_i$$

Et de plus :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) = \sum_{j \in J} p_j \text{ où } J = \{j \in I / |x_j - E(X)| \geqslant \varepsilon\}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{j \in J} (x_j - E(X))^2 p_j + \sum_{i \notin J} (x_i - E(X))^2 p_i \\ &\geqslant \sum_{j \in J} (x_j - E(X))^2 p_j \\ &\geqslant \varepsilon^2 \sum_{j \in J} p_j \\ &\geqslant \varepsilon^2 P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

• <u>Si X est une variable à densité :</u>
On a ici :

$$\begin{aligned}V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx\\ &= \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon}(x-E(X))^2 f(x)\,dx + \int_{E(X)-\varepsilon}^{E(X)+\varepsilon}(x-E(X))^2 f(x)\,dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx\end{aligned}$$

Et de plus

$$\begin{aligned}P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon) &= P(X\leqslant E(X)-\varepsilon)+P(X\geqslant E(X)+\varepsilon)\\ &= \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}V(X) &\geqslant \int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon}(x-E(X))^2 f(x)\,dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty}(x-E(X))^2 f(x)\,dx\\ &\geqslant \varepsilon^2\left(\int_{-\infty}^{E(X)-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{E(X)+\varepsilon}^{+\infty} f(x)\,dx\right)\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

□

Remarque :

Lorsque $|X-E(X)|\geqslant\varepsilon$, les valeurs de X sont à une distance plus grande que ε de leur moyenne $E(X)$. Donc $P(|X-E(X)|\geqslant\varepsilon)$ mesure la probabilité que X prenne des valeurs éloignées de $E(X)$. Cette probabilité est d'autant plus faible que $V(X)$ est petit (la variance mesure « l'étalement » des valeurs prises par X) et que ε est grand (plus on est loin de la moyenne moins on trouve de valeurs de X).

Exemple 1:

On utilise un dé cubique parfait. On cherche le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du « 1 » diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

1. Lorsqu'on a effectué n lancers, on note X_n le nombre de 1 obtenus, et F_n la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers. Exprimer F_n en fonction de X_n et de n.
2. Traduire à l'aide d'une inégalité ce que l'on cherche dans l'énoncé.
3. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, trouver la valeur de n que l'on cherche.

1. La fréquence est égale au nombre de 1 obtenus divisé par le nombre total de lancers effectués donc on a $F_n=\frac{X_n}{n}$.

2. On cherche n pour que $P\left(\left|F_n-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}\right)\geqslant 0,95$.

3. Nous souhaitons ici appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur F_n avec $\varepsilon=\frac{1}{100}$. *Nous avons besoin de $E(F_n)$ et de $V(F_n)$.*

X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n,\frac{1}{6}\right)$ *donc* $E(X_n)=\frac{n}{6}$ *et* $V(X_n)=\frac{5n}{36}$.

On en déduit donc que $E(F_n) = \dfrac{1}{6}$ *et* $V(F_n) = \dfrac{5}{36n}$
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{1}{100}\right) \leqslant \frac{5.10^4}{36n}$$
$$\Leftrightarrow P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geqslant 1 - \frac{5.10^4}{36n}$$

Il suffit donc de choisir n *tel que* $1 - \dfrac{5.10^4}{36n} \geqslant 0,95$ *c'est-à-dire* $n \geqslant 27778$.

II Convergence d'une suite de VAR

1 Loi faible des grands nombres

Théorème 2
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance σ^2. On pose $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$. Alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} P\left(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

On dit que $\overline{X}_n$ converge en probabilité vers la variable constante égale à m.

Démonstration :

On a $E(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \dfrac{1}{n} nm = m$ et comme les variables sont indépendantes, $V(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$0 \leqslant P\left(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Donc par encadrement de limites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(|\overline{X}_n - m| \geqslant \varepsilon\right) = 0$

□

Remarque :
On considère une suite d'épreuves indépendantes, et un événement A, de probabilité p, qui peut ou non se réaliser au cours d'une des épreuves. On note X_i la variable qui vaut 1 si A s'est réalisé à la i-ème épreuve et 0 sinon. Dans ce cas $\overline{X}_n$ représente la fréquence de réalisation de l'événement A au cours des n première épreuves. La loi faible des grands nombres nous dit que cette fréquence « tend » vers p.

Cela justifie *a posteriori* notre façon d'introduire la notion de probabilité, c'est-à-dire comme étant la limite de la fréquence d'apparition de l'événement donné.

2 Convergence en loi

Définition 1
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR. On note F_{X_n} la fonction de répartition de X_n.
On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge en loi** vers la VAR X, de fonction de répartition F_X, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ **où** F_X **est continue**, la suite $(F_{X_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F_X(x)$.

Exemple 2:

Soit X une VAR à densité. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $X_n = e^{1/n}X$.

Montrons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

On note F la fonction de répartition de X et F_n la fonction de répartition de X_n.

Il faut ici montrer que pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$. Pour cela on va exprimer $F_n(x)$ en fonction de $F(x)$.

Pour tout réel x, on a $F_n(x) = P(X_n \leqslant x) = P(e^{1/n}X \leqslant x) = P(X \leqslant e^{-1/n}x) = F(e^{-1/n}x)$.

Or, pour tout réel x fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-1/n}x = x$ et comme X est une variable à densité, F est continue en x.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F(e^{-1/n}x) = F(x)$.

Ainsi, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$ donc (X_n) converge en loi vers X.

Propriété 1

Soit (X_n) une suit de VAR convergeant en loi vers la VAR X. Pour tous points a et b de continuité de F_X tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} P(a < X_n \leqslant b) = P(a < X \leqslant b)$$

Théorème 3

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR **discrètes** et X une VAR **discrète** telles que pour tout entier n, $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ssi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

Nous admettrons ici ce théorème. Vous pourrez trouver une démonstration dans la plupart des livres de cours d'ECE2.

Attention certaines suites de VAR discrètes convergent en loi vers une VAR à densité!!! Dans ce cas le théorème précédent ne s'applique plus.

Exemple 3:

Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de VAR telles que, pour tout entier naturel non nul n, X_n suit la loi de Poisson de paramètre $\dfrac{1}{n}$.

Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Comme on sait à l'avance que la limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ va être une variable discrète on peut utiliser le théorème précédent.

Pour tout entier naturel k, on a $P(X_n = k) = \dfrac{e^{1/n}(1/n)^k}{k!} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{1}{n}\right)^k e^{1/n}$

Il nous faut séparer le cas $k = 0$ car alors $\left(\dfrac{1}{n}\right)^k = 1$.

- On a $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{0!} \times 1 \times e^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{1/n} = 1$
- Si $k \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = 0$.

Ainsi $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X qui vérifie $P(X = 0) = 1$ et pour tout entier k non nul $P(X = k) = 0$. X est la variable certaine égale à 0.

Théorème 4

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires réelles définies sur une même espace probabilisé et **indépendantes**. On suppose que les X_n ont toutes la même loi et qu'elles admettent une variance non nulle.

On note :

$$E(X_1) = m \quad V(X_1) = \sigma^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{S_n}{n}$$

On a donc $S_n^* = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n}(Y_n - m)}{\sigma} = Y_n^*$

Alors la suite (S_n^*) (et donc la suite (Y_n^*)) converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarques :

- On a donc pour $a > b$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(a < S_n^* \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\,dt$.
- Comme $S_n = \sigma\sqrt{n}S_n^* + nm$, ce théorème nous permet de dire que pour n assez grand la variable aléatoire S_n suit approximativement la loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.
- C'est un théorème remarquable car le résultat est très fort et contient peu d'hypothèses. De plus il montre l'importance de la loi normale en probabilités et statistiques.
- Ce théorème est parfois appelé « théorème central limite ».
- En pratique pour $n \geqslant 30$, on pourra approcher la loi de S_n^* par la loi normale centrée réduite. Ce théorème sera à l'origine de plusieurs approximations de lois.

Exemple 4:

Une montre fait une erreur d'au plus une demi-minute par jour. On cherche à déterminer la probabilité que l'erreur commise au bout d'une année (non bissextile) soit inférieure ou égale à un quart d'heure.

Pour cela, on considère que l'erreur commise un jour donné, en secondes, suit une loi uniforme sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et que les erreurs commises chaque jour sont indépendantes. On donne $\dfrac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \approx 2,72$.

On note X_k l'erreur commise le k-ième jour de l'année. D'après nos hypothèses X_k suit la loi uniforme sur $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$ et les X_k sont indépendantes. De plus l'erreur commise au bout d'un an, est $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{365} X_k$. On cherche donc à calculer $P(-15 \leqslant S \leqslant 15)$.

On a ici $E(X_k) = 0$ et $V(X_k) = \dfrac{1}{12}$, donc $E(S) = 0$ et $V(S) = \dfrac{365}{12}$

Donc la variable centrée réduite associée à S est $S^* = \dfrac{S\sqrt{12}}{\sqrt{365}}$.

Comme $365 > 30$, le théorème de la limite centrée nous dit que S^* suit approximativement la loi normale centrée réduite et donc :

$$\begin{aligned}
P(-15 \leqslant S \leqslant 15) &= P\left(-\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \leqslant \frac{S\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \leqslant \frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) = P\left(-\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}} \leqslant S^* \leqslant \frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) - \Phi\left(-\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) \\
&\approx 2\Phi\left(\frac{15\sqrt{12}}{\sqrt{365}}\right) - 1 \approx 2\Phi(2,72) - 1 \approx 0,9934
\end{aligned}$$

III Approximation de variables aléatoires

1 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale

Théorème 5
Soient n un entier fixé et $p \in]0;1[$. On pose $I = \{N \in \mathbb{N} / Np \in \mathbb{N}\}$. Soit $(X_N)_{N\in I}$ une suite de VAR telle que pour tout N, X_N suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$. Alors (X_N) converge en loi vers une VAR X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Démonstration : Hors programme

On a :

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{(Np)!(Nq)!n!(N-n)!}{k!(Np-k)!(n-k)!(Nq-n+k)!N!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(Np)(Np-1)\cdots(Np-k+1)\times(Nq)\cdots(Nq-n+k+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)} \end{aligned}$$

Le produit $(Np)(Np-1)\cdots(Np-k+1)\times(Nq)\cdots(Nq-n+k+1)$ possède n facteurs chacun équivalent à Np ou Nq lorsque $N \to +\infty$ donc est équivalent à $(Np)^k(Nq)^{n-k}$ lorsque $N \to +\infty$. De même $N(N-1)\cdots(N-n+1) \sim N^n$ donc on en déduit que

$$\lim_{N\to+\infty} P(X_N = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

X_N converge bien en loi vers une VAR X qui suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

□

En pratique :
Dès que $N \geqslant 10n$, on pourra dire que l'on peut approcher la loi hypergéométrique par la loi binomiale.

Exemple 5:
Soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(100;4;0,05)$. Nous allons calculer $P(X \geqslant 1)$.

- Calcul exact :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{5}{0}\binom{95}{4}}{\binom{100}{4}} \approx 0,188$$

- Calcul approché : on approche la loi $\mathcal{H}(100;4;0,05)$ par la loi $\mathcal{B}(4;0,5)$

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{4}{0}(0,05)^0(0,95)^4 \approx 0,185$$

Théorème 6
Soit λ un réel strictement positif et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VAR discrètes telles que X_n suit la loi binomiale de paramètre $\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une VAR X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration :

On a
$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}e^{(n-k)\ln(1-\lambda/n)} \end{aligned}$$
On a lorsque $n \to +\infty$, $n(n-1)\cdots(n-k+1) \sim n^k$
De plus comme $\dfrac{\lambda}{n} \to 0$, $\ln(1-\lambda/n) \sim -\dfrac{\lambda}{n}$. Donc on en déduit :
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$
Ainsi X_n converge bien en loi vers une variable qui suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

$\square$

En pratique :
On considère que lorsque $n \geqslant 30$ et $p \leqslant 0,1$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$. On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares (elle approche le tirage de n boules avec remise dans une urne contenant des boules blanche en proportion égale à p qui est faible).

Exemple 6:
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(100; 0,05)$. Nous allons calculer $P(X = 2)$.
• Calcul exact :
$$P(X=2) = \binom{100}{2}(0,05)^2(0,95)^{98} \approx 0,0812$$
• Calcul approché : on approche la loi $\mathcal{B}(100; 0,05)$ par la loi $\mathcal{P}(5)$
$$P(X=2) \approx \frac{5^2}{2!}e^{-5} \approx 0,0843$$

Théorème 7
Soit $p \in]0;1[$, $q = 1-p$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires telle que S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Alors la suite de variable aléatoire $S_n^* = \dfrac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Démonstration : Hors programme

Toute variable binomiale de paramètre (n,p) peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes. On a donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ où X_k est une variable de Bernoulli de paramètre p. Comme les variables de Bernoulli admettent une espérance p et une variance pq, le théorème de la limite centrée s'applique bien et il nous donne le résultat demandé.

□

En pratique :
On considère que pour $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $nq \geqslant 5$, on peut approcher la loi $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi $\mathcal{N}(np,npq)$. En exercice, on se ramènera plutôt au fait que la loi de X^* peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Correction de continuité :
Si S_n suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec n et p tels que on peut approcher S_n par N_n qui suit la loi $\mathcal{N}(np,npq)$, on devrait écrire :

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \quad P(S_n = k) \approx P(N_n = k)$$

mais comme N_n est une variable à densité, on a $P(N_n = k) = 0$, donc notre approximation ci-dessus n'est pas bonne. On écrira plutôt :

$$P(S_n = k) \approx P(k - 0,5 < N_n < k + 0,5)$$

et on appelle cela utiliser la **correction de continuité**.

Exemple 7:
Soit X une variable qui suit la loi $\mathcal{B}(900;0,5)$. On cherche à calculer $P(405 \leqslant X \leqslant 495)$.

Pour le calcul exact, il nous faudrait calculer des combinaisons avec de très grand nombres, ce qui nécessite un ordinateur et ne donne parfois qu'une valeur approchée.

On remarque ici que l'on est dans les condition où l'on peut approcher notre loi binomiale par une loi normale $\mathcal{N}(450,225)$ car $900 > 30$ et $900 \times 0,5 = 450 > 5$.

Cependant pour la loi normale $\mathcal{N}(450,225)$ il n'est toujours pas facile de calculer $P(405 \leqslant X \leqslant 495)$ car on ne connait pas la fonction de répartition d'une loi normale quelconque. Nous somme donc obligé de nous ramener à la loi normale centrée réduite en nous intéressant à la variable centrée réduite associée à X.

On a $X^* = \dfrac{X - 450}{\sqrt{225}}$ et on a donc que la variable X^* suit approximativement la loi normale centrée réduite.

De plus $P(405 \leqslant X \leqslant 495) = P\left(-3 \leqslant \dfrac{X-450}{15} \leqslant 3\right) = P(-3 \leqslant X^* \leqslant 3)$. Donc on a :

$$P(405 \leqslant X \leqslant 495) \approx \Phi(3) - \Phi(-3) \approx \Phi(3) - (1 - \Phi(3)) \approx 2\Phi(3) - 1 \approx 0,9974$$

On verra en exercice que dans le cas du calcul de $P(a \leqslant X \leqslant b)$ il n'est pas forcément nécessaire d'appliquer la correction de continuité, mais on peut parfois vous le demander.

Théorème 8
Soit α un réel strictement positif et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires telle que S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\alpha)$. Alors la suite de variable aléatoire $S_n^* = \dfrac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

Démonstration : Hors programme

Toute variable de Poisson de paramètre $n\alpha$ peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires de Poisson de paramètre α mutuellement indépendantes. On a donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ où X_k est une variable de Poisson de paramètre α. Comme les variables de Poisson admettent une espérance α et une variance α, le théorème de la limite centrée s'applique bien et il nous donne le résultat demandé.

□

En pratique :
On considère que pour $\lambda \geqslant 18$ on peut approcher la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ par la loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

Correction de continuité :
Tout comme précédemment il ne faut pas oublier d'appliquer, si nécessaire, la correction de continuité.

Exemple 8:
Ici encore pour de grandes valeurs de λ, la calcul de $P(X \leqslant a)$ pourra nécessiter l'utilisation d'un ordinateur.

Si on considère X qui suit une loi de Poisson de paramètre 64 que l'on cherche à calculer $P(X \leqslant 74)$, on a intérêt à approcher la loi de X par la loi $\mathcal{N}(64, 64)$ et donc $\dfrac{X - 64}{8}$ suit la loi normale centrée réduite. On a donc

$$P(X \leqslant 74) = P\left(\frac{X-64}{8} \leqslant 1,25\right) \approx \Phi(1,25) \approx 0,8944$$